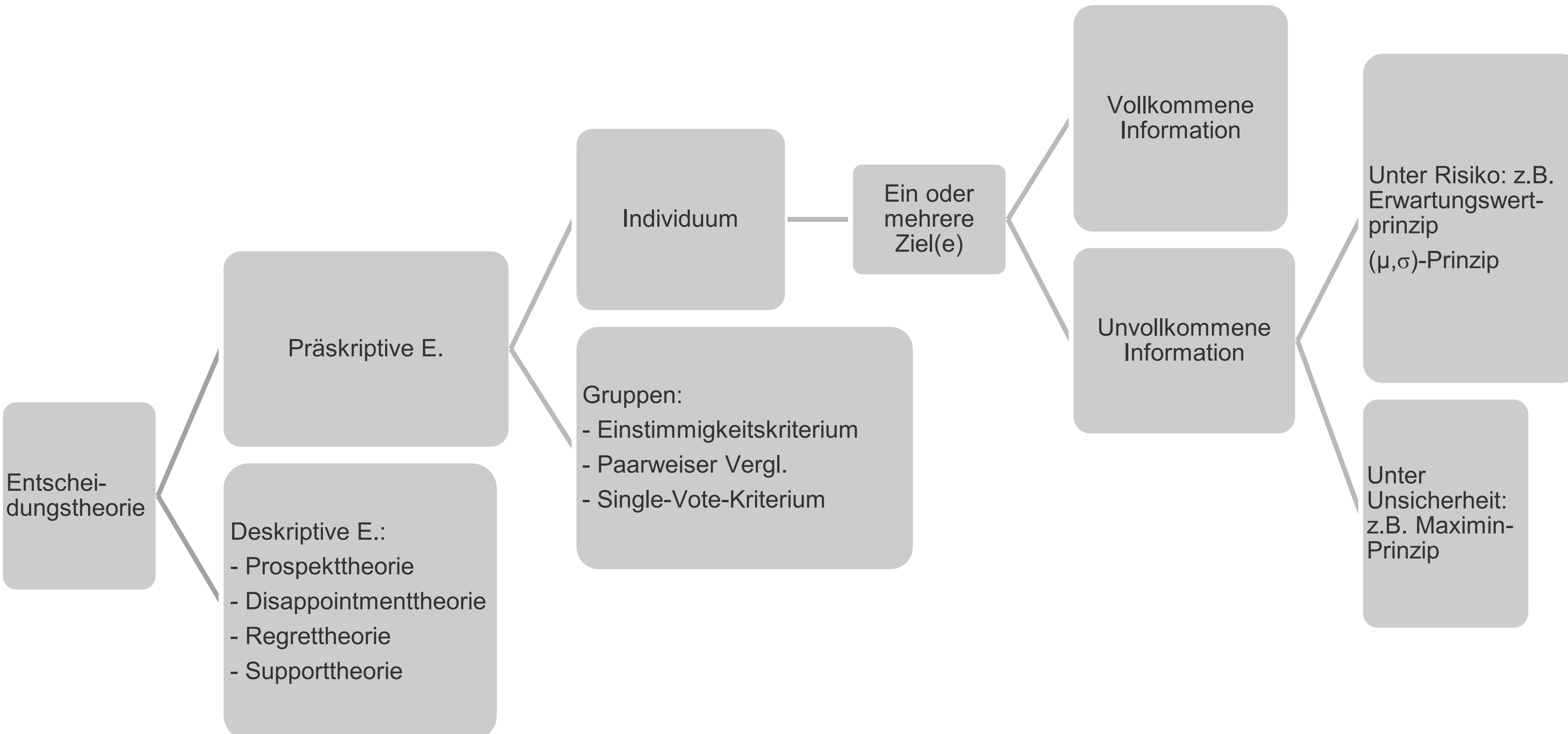
Gebiete der Entscheidungstheorie



Entscheidungsregeln bei einem Ziel

- **bei Sicherheit**
  - Maximierung (z.B. Gewinn)
  - Minimierung (z.B. Kosten)
- **bei Unsicherheit**
  - bei Risiko
    - Wenn Entscheider risikoneutral: Erwartungswert
    - Wenn Entscheider risikoavers oder risikofreudig: z.B. Bernoulli-Prinzip (Risikonutzen)
  - bei Ungewissheit

Aufgabe 1

- Jonny Fortuna hat nahezu sein gesamtes Vermögen beim Spiel in Monte Carlo verloren. Nun besinnt er sich plötzlich auf seine Kenntnisse der Entscheidungstheorie und hofft, dadurch wieder zu Geld kommen zu können.
- Handlungsalternativen: (a_1): Beteiligung am Roulette-Spiel; (a_2): Black-Jack-Spiel; (a_3): Kauf eines Super-Lotterieloses.
- Er meint, er könne die folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen der erzielbaren Gewinne seiner Entscheidung zugrunde legen:

	a_1		a_2			a_3	
e (in 1000 Euro)	0	10	0	10	50	0	100
p	0,6	0,4	0,8	0,15	0,05	0,96	0,04

a) Berechnen Sie die Erwartungswerte und Varianzen der drei Alternativen. Für welche Alternative würde sich Jonny Fortuna
(1) bei risikoneutraler Einstellung
(2) bei risikoscheuer Einstellung
entscheiden?.

b) Angenommen, Jonny Fortuna wolle sich nach der Entscheidungsregel $\max : \Phi = \mu_i - 0{,}1\sigma_i^2$ richten. Ermitteln Sie die Präferenzwerte der drei Alternativen. Welches Spiel wählt Jonny Fortuna also?

e_{11} e_{23}

Erläuterung zu Aufgabe 1

	a_1		a_2			a_3	
e_{ij} (in 1000 Euro)	0	10	0	10	50	0	100
p_{ij}	0,6	0,4	0,8	0,15	0,05	0,96	0,04
μ_{ij}	4		4			4	
σ_i^2	24		124			384	

$0{,}6*0 + 0{,}4*10 = 4$

$0{,}6*(0-4)^2 + 0{,}4*(10-4)^2 = 24$

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \bullet e_{ij}$$

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \bullet \left(e_{ij} - \mu_i\right)^2$$

Aufgabe 2

Die Solar-Security-Versicherungsgesellschaft AG bietet Eigentümern von Photovoltaikanlagen zwei Typen von Versicherungen gegen Diebstahl an:

- Typ A: Voller Ersatz aller gestohlenen Anlagenbestandteile. Die Prämie beläuft sich auf 5 % der Versicherungssumme
- Typ B: Teilweiser Ersatz der gestohlenen Gegenstände. Der Versicherungsnehmer muss 3.000 Euro Selbstbehalt tragen. Die Prämie beläuft sich auf 2 % der Versicherungssumme

Der stolze PV-Anlagenbesitzer J. Bond beabsichtigt, die zwei gleich großen PV-Anlagen auf der Garage und dem Wohnhaus gegen Diebstahl zu versichern (Wert jeder der beiden Anlagen 10.000 Euro).

Nach Rücksprache mit der örtlichen Polizeidienststelle rechnet er mit folgenden Wahrscheinlichkeiten eines Diebstahls

- 1 % Diebstahl beider Anlagen
- 5 % Diebstahl einer der beiden Anlagen (vermutlich Garage, weil besser zugänglich)
- 94 % kein Diebstahl.

a) J. Bond erwägt, sich den Versicherungsschutz zu sparen (Handlungsalternative a_1)

b) J. Bond erwägt den Abschluss einer Versicherung vom Typ A über 20.000 Euro (a_2)

c) J. Bond erwägt den Abschluss einer Versicherung vom Typ B über 20.000 Euro (a_3)

Teil 1: Erstellen Sie die Ergebnismatrix und berechnen Sie für alle drei Alternativen μ und σ^2.

Teil 2: Im Rahmen eines Experiments wurde die Präferenzfunktion von J. Bond mit

$\Phi(a_i)=\mu i - 0{,}001(\mu_i^2 + \sigma_i^2)$

ermittelt. Für welche Handlungsalternative a_1 bis a_3 wird sich J. Bond entscheiden?

Lösung Aufgabe 2 (Teil 1)

	s_1 (p=0,01)	s_2 (p=0,05)	s_3 (p=0,94)
a_1	-20.000	-10.000	0
a_2	-1.000	-1.000	-1.000
a_3	-3.400	-3.400	-400

Lösung Aufgabe 2 (Teil 2)

	s_1 (p=0,01)	s_2 (p=0,05)	s_3 (p=0,94)
a_1	-20.000	-10.000	0
a_2	-1.000	-1.000	-1.000
a_3	-3.400	-3.400	-400

μ_1 = 0,01*(-20000) + 0,05*(-10000) + 0,94*0 = -700

μ_2 = 0,01*(-1000) + 0,05*(-1000) + 0,94*(-1000) = -1000

μ_3 = 0,01*(-3400) + 0,05*(-3400) + 0,94*(-400) = -580

$$\sigma_1 = \sqrt{[0{,}01 \bullet (-20000 + 700)^2 + 0{,}05 \bullet (-10000 + 700)^2 + 0{,}94 \bullet (0 + 700)^2]} = 2917$$

$$\sigma_2 = \sqrt{[0{,}01 \bullet (-1000 + 1000)^2 + 0{,}05 \bullet (-1000 + 1000)^2 + 0{,}94 \bullet (-1000 + 1000)^2]} = 0$$

$$\sigma 3 = \sqrt{[0{,}01 \bullet (-3400 + 580)^2 + 0{,}05 \bullet (-3400 + 580)^2 + 0{,}94 \bullet (-400 + 580)^2]} = 890$$

Lösung Aufgabe 2 (Teil 3)

μ_1 = 0,01*(-20000) + 0,05*(-10000) + 0,94*0 = -700

μ_2 = 0,01*(-1000) + 0,05*(-1000) + 0,94*(-1000) = -1000

μ_3 = 0,01*(-3400) + 0,05*(-3400) + 0,94*(-400) = -580

$$\sigma_1 = \sqrt{[0{,}01 \bullet (-20000 + 700)^2 + 0{,}05 \bullet (-10000 + 700)^2 + 0{,}94 \bullet (0 + 700)^2]} = 2917$$

$$\sigma_2 = \sqrt{[0{,}01 \bullet (-1000 + 1000)^2 + 0{,}05 \bullet (-1000 + 1000)^2 + 0{,}94 \bullet (-1000 + 1000)^2]} = 0$$

$$\sigma 3 = \sqrt{[0{,}01 \bullet (-3400 + 580)^2 + 0{,}05 \bullet (-3400 + 580)^2 + 0{,}94 \bullet (-400 + 580)^2]} = 712$$

J. Bond richtet sich gemäß der Aufgabe nach der Entscheidungsregel: $\max : \Phi = \mu_i - 0{,}001(\mu^2 + \sigma_i^2)$

$\Phi(a_1)$ = -700 – 0,001(-700² + 2917²) = -9699

$\Phi(a_2)$ = -1000 – 0,001(-1000² + 0²) = -2000

$\Phi(a_3)$ = -580 – 0,001(-580² + 712²) = -1424

Versicherung vom Typ B ist optimal

Interpretation der Standardabweichung 1

Jahr	Kurs am Jahresbeginn	Kurs am Jahresende	Rendite
2007	62,- EUR	66,- EUR	+6,5%
2008	66,- EUR	74,- EUR	+12,1%
2010	74,- EUR	78,- EUR	+5,4%
2011	78,- EUR	70,- EUR	-10,3%

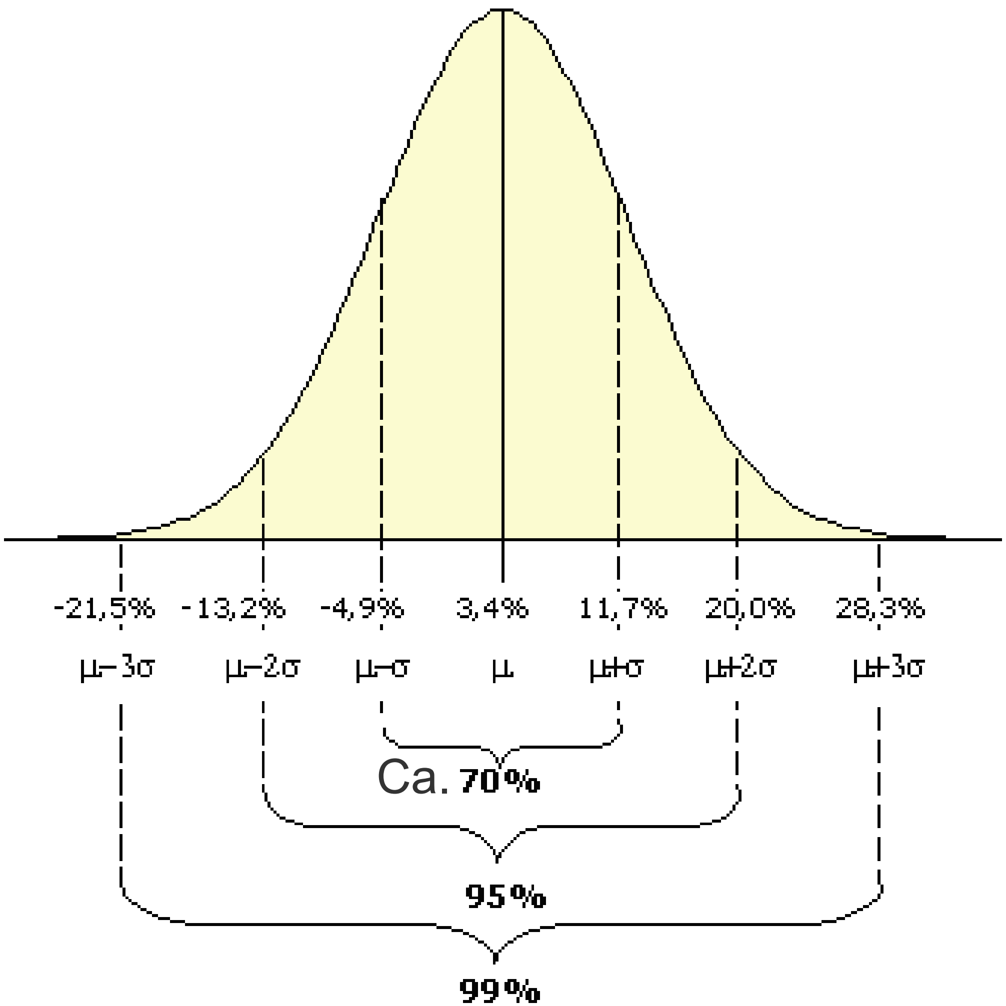
Interpretation der Standardabweichung 2

- Erwartungswert der Rendite der Aktie: 3,4%
- Standardabweichung der Aktie:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{4} \times \left((6{,}5\% - 3{,}4\%)^2 + (12{,}1\% - 3{,}4\%)^2 + (5{,}4\% - 3{,}4\%)^2 + (-10{,}3\% - 3{,}4\%)^2 \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} \times (9{,}6\% + 75{,}7\% + 4{,}0\% + 187{,}7\%)} = 8{,}3\%$$

Interpretation der Standardabweichung 3: Normalverteilung mit Erwartungswert der Rendite von 3,4%



$$\mu_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \bullet e_{ij}$$

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \bullet \left(e_{ij} - \mu_i\right)^2$$