



Fach: Produktionsökonomie

Grundlagen der Produktionstheorie

Ströbel/Schuh

Studienziele:

- 1 Kenntnis der Prämissen der Produktionstheorie
- 2 Fähigkeit die produktionstheoretischen Zusammenhänge für die drei Planungsebenen des landwirtschaftlichen Betriebes darzustellen
- 3 Fähigkeit die Optimalpunkte für die drei Planungsebenen zu ermitteln
- 4 Kenntnis der theoretischen Definition der optimalen Betriebsorganisation

Inhaltsverzeichnis:

	<i>Seite</i>
1 Einführung	2
1.1 Die Prämissen der Produktionstheorie	2
1.2 Zum Begriff der Produktionsfunktion	3
1.3 Grundüberlegungen zur optimalen Betriebsorganisation	5
2 Einfache Produktion	6
2.1 Ein variabler Faktor	6
2.1.1 Produktionsbeziehungen mit einem variabler Faktor	6
2.1.1.1 Produktionsfunktion mit proportionalem Ertragsanstieg	6
2.1.1.2 Produktionsfunktion mit unterproportionalem Ertragsanstieg	7
2.1.1.3 Produktionsfunktion mit überproportionalem Ertragsanstieg	9
2.1.1.4 Neoklassische Produktionsfunktion	10
2.1.2 Bestimmung der optimalen Einsatzmenge bei einem variablen Faktor	11
2.2 Zwei variable Faktoren	17
2.2.1 Produktionsbeziehungen zwischen zwei variablen Faktoren	17
2.2.2 Bestimmung der optimalen Faktorkombination (Minimalkostenkombination)	20
2.3 Expansionspfad	23
3 Verbundene Produktion (Mehrproduktbetrieb)	24
3.1 Parallele (unverbundene) Produktion	24
3.2 Konkurrierende (Alternativ-) Produktion	24
3.2.1 Konstante Grenzrate der Substitution	24
3.2.2 Zunehmende Grenzkosten der Substitution	25
3.2.3 Abnehmende Grenzrate der Substitution	25
3.3 Koppelproduktion	25
3.4 Ermittlung der optimalen Produktionsrichtung	25
4 Optimale Betriebsorganisation	27

1 Einführung

1.1 Die Prämissen der Produktionstheorie

Die Theorie der Unternehmung (Produktionstheorie) beinhaltet die grundlegenden Zusammenhänge des Güterangebots und der Faktornachfrage durch Unternehmen. Dabei wird jeweils von ökonomisch rationalem Verhalten der Wirtschaftssubjekte ausgegangen.

Im volkswirtschaftlichen Kreislauf haben die **Unternehmen** zwei **Funktionen**:

- Produktion wirtschaftlicher Güter, die entweder von den Haushalten als Konsumgüter oder im weiteren Verlauf der Produktion als Zwischenprodukte verwendet werden; das können materielle wie immaterielle Güter sein
- Nachfrage nach Produktionsfaktoren der Haushalte (Boden, Arbeit, Kapital). Als Entgelt für bereitgestellte Faktoren erhalten die Haushalte Faktorentgelte (Einkommen) als Grundlage der Konsumgüternachfrage

Das landwirtschaftliche Unternehmen verfügt über eine Reihe von Produktionsfaktoren (Produktionsmittel, d.h. Boden/Arbeit/Kapital bzw. Güter/Dienste/Rechte/Management) mit deren Hilfe der Landwirt eine größere Anzahl verschiedenartiger Produkte erzeugen kann (z.B. Getreide, Kartoffeln, Milch, Fleisch usw.). Die Menge der erzeugbaren Produkte ist abhängig vom Umfang der zur Verfügung stehenden Produktionsfaktoren. Der Landwirt muss entscheiden, welche Produkte er mit den nur begrenzt zur Verfügung stehenden Produktionsfaktoren herstellen will. Das Problem dieser Entscheidung besteht in der Ermittlung der optimalen Betriebsorganisation, die die höchstmögliche Befriedigung der ökonomischen Zielsetzung (Gewinn bzw. Nutzenmaximierung) ermöglicht.

Im Mittelpunkt der Entscheidungsfragen steht also die Frage nach der optimalen Organisation des landwirtschaftlichen Betriebes. Gesucht werden - unter Annahme einer eindeutigen Zielsetzung - die Gesetzmäßigkeiten, nach denen die Auswahl, der Einsatz und die Kombination der Produktionsverfahren vorzunehmen ist, um die optimale Organisation eines Betriebes zu erreichen.

Um diese Gesetzmäßigkeiten kennen zu lernen, ist es erforderlich, sich mit den Zusammenhängen der landwirtschaftlichen Produktion zu befassen. Hiermit beschäftigt sich die Theorie der landwirtschaftlichen Produktion (Produktionstheorie), die eine Vielfalt von Aussagen über die Produktionszusammenhänge in der Landwirtschaft zulässt. Aus diesen Aussagen lassen sich Gesetzmäßigkeiten ableiten, nach denen ein Landwirt handeln muss, wenn er seinen Betrieb optimal organisieren will. Die Produktionstheorie definiert also jene Bedingungen, die erfüllt sein müssen, um beispielsweise den maximalen Gewinn zu erreichen bzw. die Kosten für eine bestimmte Produktion zu minimieren.

Jede Theorie, so auch die Produktionstheorie, bedient sich der Abstraktion und Idealisierung, d.h. sie nimmt gedankliche Vereinfachungen vor, um zu einer überschaubaren Darstellung der Zusammenhänge im landwirtschaftlichen Betrieb als ein Modell zu kommen. Die gedankliche Simplifizierung der Zusammenhänge ermöglicht erst die verstandesmäßige Durchdringung der komplexen Wirklichkeit.

Die Produktionstheorie basiert auf folgenden **Voraussetzungen** (Prämissen):

1. *Der Unternehmer handelt unter vollkommener Voraussicht*

Es wird angenommen dass er volle Kenntnisse über die Zustände und Entwicklungen im technischen wie auch im wirtschaftlichen Bereich (volle Markttransparenz). Risiko und Unsicherheit werden in der Produktionstheorie nicht berücksichtigt.

2. *Der Unternehmer maximiert den Gewinn (Periodengewinn)*

Der Unternehmer handelt also nach dem Erwerbsprinzip. Andere denkbare Ziele (Nutzenprinzip, d.h. ausreichende Freizeit, persönliche Geltung, Prestige) und persönliche Motive (Präferenzen) sind nicht ausreichend quantifizierbar und werden deshalb nicht berücksichtigt. Die optimale Betriebsorganisation ist also dann erreicht, wenn der nachhaltig höchste Gewinn erzielt wird.

3. *Die Dimension Zeit bleibt unberücksichtigt*

In der Theorie vollzieht sich jede Produktion entgegen der Wirklichkeit zu einem Zeitpunkt, nicht in einem Zeitraum. Die Betrachtungsweise der Theorie ist statisch, nicht dynamisch.

4. *Produkte und Produktionsmittel sind beliebig teilbar*

In der Wirklichkeit sind jedoch z.B. Arbeitskräfte und Maschinen nur begrenzt teilbar, und bestimmte Produkte (z.B. Kühe, Bullen) sind nur in ganzzahligen Einheiten zu erzeugen.

5. *Der Landwirt handelt als Mengenanpasser*

Im Gegensatz zum Monopolisten kann er nicht durch eine Veränderung der angebotenen Menge Einfluss auf die Höhe der Preise nehmen; er reagiert nur mit seiner Produktionsmenge auf die vorgegebenen Preise.

Die genannten Prämissen zeigen deutlich den relativ hohen Abstraktionsgrad in Produktionstheorie. Die aus der Produktionstheorie abgeleiteten Prinzipien werden der Wirtschaftswirklichkeit daher nie in allen Punkten gerecht. Allein die große Vielfalt an unternehmerischen Zielsetzungen, die mehr oder weniger weit Erwerbsprinzip abweichen, mögen dies verdeutlichen.

Die starke Vereinfachung ist jedoch insofern von Vorteil, als sich die Betrachtungsweise durch klare und übersichtliche Darstellung von Zusammenhängen auszeichnet und zu eindeutigen Ergebnissen führt. Richtig eingesetzt bietet die Produktionstheorie sehr wichtige Hilfestellungen für Entscheidungen in der Wirklichkeit.

1.2 Zum Begriff der Produktionsfunktion

Grundlage für die Produktions- und Gewinnplanung eines Unternehmens sind detaillierte Kenntnisse über die Beziehungen zwischen dem Faktoreinsatz und der Produktionsmenge. Diese Beziehungen (auch Produktions- oder Ertragsfunktionen genannt) können dargestellt werden als

- Faktor-Produkt-Beziehung (natural), auch als Input-Output-Beziehung bezeichnet,
- Aufwand-Ertrags-Beziehung (monetär).

Wird nur eine Variable monetär bewertet ergeben sich Faktor-Ertrags-Beziehung bzw. Aufwand-Produkt-Beziehung.

Üblicherweise bezeichnet man das erzeugte Produkt mit Y und die verschiedenen Aufwandsfaktoren mit X ($X_1, X_2, \dots, X_n$). Den mengenmäßigen Ertrag des Produktes Y kennzeichnet man mit y während die Einsatzmengen der Produktionsfaktoren $X_1, X_2, \dots, X_n$ mit $x_1, x_2, \dots, x_n$ bezeichnet werden.

Da zwischen Input und Output gesetzmäßige Beziehungen bestehen, lassen sich diese Beziehungen als mathematische Funktion (die so genannte Produktionsfunktion) ausdrücken:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Diese Gleichung stellt die Produktionsfunktion in allgemeiner Form dar. Die Produktmenge y ist dabei die funktional (f) von den Faktoreinsatzmengen (x-Werte) abhängige Variable.

Die Produktionsfunktion gibt nur die in physischen Einheiten gemessenen technischen Relationen zwischen Faktoreinsatz und Produktionsmenge an. Sie beschreibt insofern zunächst nur produktionstechnische Beziehungen, die, obwohl nicht eigentlicher Gegenstand der Ökonomie, als Grunddaten für die ökonomischen Betrachtung unabdingbar sind. Typische Fragestellungen sind beispielsweise: welche Düngemittelmenge, wie viel Schlepperstunden und wie viel Arbeitsstunden sind für die Produktion einer bestimmten Gütermenge erforderlich?

Als Maßstab für die technische Ergiebigkeit (Effizienz) des Produktionsmitteleinsatzes dient die **Produktivität**. Sie berechnet sich als Quotient von Produktmenge und Faktormenge (z.B. kg Milch je kg Futter).

Bewertet man das Produktionsvolumen oder den Faktoreinsatz mit den jeweiligen Preisen, lassen sich aus Produktionsfunktionen unmittelbar folgende weitere Funktionen ableiten:

- Umsatzfunktionen (Umsatz = Produktmenge × Produktpreis); auch Erlösfunktion genannt
- Kostenfunktionen (Kosten = Faktoreinsatz × Faktorpreis)

Die jeweils unabhängige Variable (X-Achse) bleibt dabei meist als naturale Größe bestehen.

Entsprechend lassen sich durch die Bewertung von den naturalen Produktivitäten die Wertproduktivitäten ableiten.

Da ein einzelner Faktor allein i.d.R. keine Produktion erbringt, liegt jeder Produktionsfunktion eine bestimmte Produktionstechnik (z.B. die Ausstattung mit fixem Maschinenbestand) zugrunde.

Andererseits existiert für jede Produktionstechnik auch jeweils eine spezifische Produktionsfunktion.

Die Beziehungen zwischen einem Produkt und mehreren Faktoren können (ggf. unter Berücksichtigung relevanter Wechselwirkungen zwischen den Faktoren) i.d.R. nicht (übersichtlich) dargestellt werden.

Einfache Produktionsfunktionen beschränken sich deshalb auf die Darstellung der Beziehung zwischen Produktionsvolumen und nur einem variablen Produktionsfaktor. Die übrigen Faktoren werden als fix angenommen:

$$y = f(x_1 \mid x_2, x_3, \dots, x_n) \quad \text{wobei alle Faktoren hinter dem senkrechten Strich fix}$$
$$y = f(x_1) \quad \text{vereinfacht}$$

Bei dieser vereinfachten Betrachtungsweise wird die Wirkung eines einzelnen Faktors (x_1) bei unterschiedlichen Einsatzmengen auf den Gesamtertrag y des Produktes Y ermittelt (Partialanalyse).

Ist der variable Faktor beliebig teilbar, kann seine Einsatzmenge also beliebig verändert werden, so ergibt sich eine kontinuierliche Produktionsfunktion (Ertragskurve). Dieser Fall ist gerade in der Landwirtschaft häufiger anzutreffen.

Interessiert z.B. die ertragssteigernde Wirkung der Stickstoffdüngung zu Weizen, so ist dies durch die Anlage eines Versuchs möglich, in dem der Einsatz von Stickstoff geändert und das Einsatzniveau der übrigen Faktoren (andere Düngemittel, Pflanzenschutz, etc.) konstant gehalten wird.

Da das Verhältnis zwischen Faktoreinsatzmenge und Gesamtertrag von der Art der eingesetzten Produktionsfaktoren und des erzeugten Produktes abhängt, ergeben sich in der Praxis unterschiedliche Typen von Produktionsfunktionen.

1.3 Grundüberlegungen zur optimalen Betriebsorganisation

Bei ökonomisch rationalem Verhalten sind von einem Unternehmer in jeder Wirtschaftsperiode folgende Fragen stets neu zu stellen:

- Welche Art und Menge von Gütern soll produziert werden (Produktionsprogramm) ?
- Auf welche Weise sollen die Güter produziert werden (Produktionsverfahren) ?
- Welche Faktoreinsatzmengen sollen zur Produktion verwendet werden (Faktoreinsatzplanung) ?
- Welche Veränderungen in der Produktionskapazität sollen vorgenommen werden und wie können diese finanziert werden (Investitions- und Finanzierungsplanung) ?

Die Entscheidungen über diese Fragenbereiche werden von 3 Seiten her beeinflusst:

- von der Ausgangslage (Ist-Situation) der Betriebe
(Faktorausstattung, Absatzmarkt, Vorleistungsmarkt)
- von den Erwartungen über die künftigen Rahmenbedingungen
(künftige Absatzmärkte, techn. Fortschritte, Preis-Kosten-Vergleich)
- von den Zielsetzungen und Verhaltensweisen der Unternehmer

Aufgrund des unterstellten Erwerbsprinzips ergibt sich die optimale Betriebsorganisation bei Erreichen des maximal möglichen Gewinnes.

Der erste Schritt bei der Gewinnmaximierung ist die Ermittlung der optimalen Einsatzmenge eines variablen Faktors zur Erzeugung eines Gutes (optimale spezielle Intensität, optimales Faktor-Produkt-Verhältnis). Hierzu liefert die Produktionsfunktion die Grundlage. Werden mehr als nur ein variabler Faktor eingesetzt, muss (unter gleichzeitiger Wahrung der optimalen speziellen Intensität) dass die Produktion mit der optimalen Faktorkombination (=Minimalkostenkombination) durchgeführt wird.

Werden zudem nicht nur ein sondern mehrere Produkte hergestellt (Mehrproduktunternehmen, verbundene Produktion) muss auch das optimale Umfangsverhältnis der verschiedenen Produktionsmöglichkeiten bestimmt werden.

Um im landwirtschaftlichen (Mehrprodukt-)Betrieb die optimale Organisation (Gewinnmaximum) zu erreichen, müssen demnach die folgenden drei Teilbedingungen gleichzeitig erfüllt sein:

- optimale Faktoreinsatzmenge (optimale spezielle Intensität)
- optimale Faktorkombination (Minimalkostenkombination)
- optimale Produktionsrichtung

Voraussetzung für die Bestimmung der dieser Teiloptima und des Gesamtoptimums ist deshalb die Kenntnis der

- Faktor-Produkt-Beziehungen,
- Faktor-Faktor-Beziehungen,
- Produkt-Produkt-Beziehungen.

2 Einfache Produktion

Die nachfolgenden Ausführungen beschränken sich vereinfachend auf die Betrachtung des Einproduktbetrieb (Herstellung lediglich eines homogenen Produktes; einfache Produktion). Diese Beschränkung ist deshalb von Vorteil, weil sich bei der einfachen Produktion sowohl die Produktionsbeziehungen zwischen Input und Output als auch die Ermittlung der optimalen Höhe und Zusammensetzung des Faktoreinsatzes übersichtlich darstellen lassen. Zudem sind die für den Einproduktbetrieb aufgezeigten Gesetzmäßigkeiten voll übertragbar auf die isolierte Betrachtung einzelner Produktionsverfahren in Mehrproduktbetrieben.

2.1 Ein variabler Faktor

Die einfachsten Beziehungen zwischen Produkten und Produktionsmitteln ergeben sich bei der Beschränkung auf die Betrachtung nur eines variablen Faktors. Die Einsatzmengen aller andern Faktoren werden als konstant unterstellt. Ist der Faktor beliebig teilbar, so lässt sich die Produktionssituation symbolisch wie folgt ausdrücken (vergleiche 1.2):

$$y = f(x_1 \mid x_2, x_3, \dots, x_n) \quad \text{wobei alle Faktoren hinter dem senkrechten Strich fix}$$

2.1.1 Produktionsbeziehungen mit einem variablen Faktor

Bei steigendem Einsatzniveau des variablen Faktors ist grundsätzlich ein

- proportionaler (konstanter) Ertragszuwachs
- unterproportionaler (abnehmender) Ertragszuwachs
- überproportionaler (zunehmender) Ertragszuwachs

denkbar. Ferner sind Verläufe von Produktionsfunktionen möglich, bei denen der Ertrag nach Erreichen eines Maximums trotz vermehrten Faktoreinsatzes konstant bleibt, bzw. wieder abfällt. Nachfolgend sollen wichtige einfache Produktionsbeziehungen anhand einiger Beispiele erläutert werden.

2.1.1.1 Produktionsfunktion mit proportionalem Ertragsanstieg

Bei einer proportionalen Beziehung zwischen einem beliebig teilbaren variablen Faktor und einem Produkt stellt sich die zugehörige Produktionsfunktion linear dar (Übersicht 1). Dies bedeutet, dass mit jeder Steigerung des Faktoreinsatzes der Gesamtertrag in gleicher Höhe (kontinuierlich) ansteigt. Ein Beispiel dafür ist die kontinuierliche Steigerung der Milchleistung bei zunehmenden Kraftfuttereinsatz. Jedes zusätzliche kg Leistungskraftfutter bringt eine Steigerung der Milchleistung um 2,0 kg Milch.

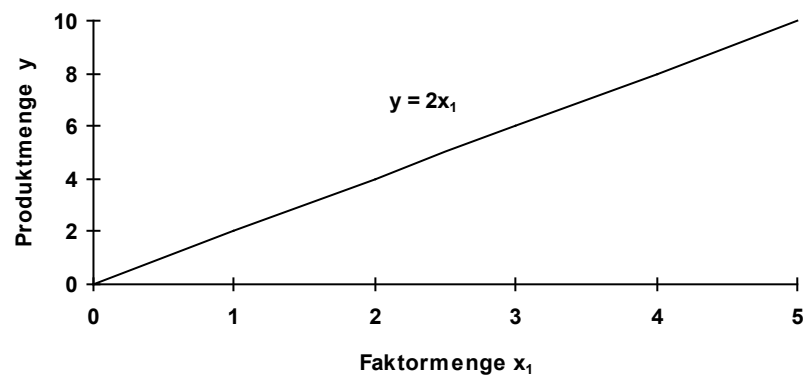
Vollständig lineare Produktionsfunktionen kommen in der Praxis selten vor. Auch bei dem genannten Kraftfutterbeispiel ist der proportionalen Faktor-Produkt-Beziehung durch die physiologische Leistungskapazität der Kuh eine Grenze gesetzt. Besteht, wie bei der Kuh, eine obere Leistungs- oder Kapazitätsgrenze ist auch bei weiterer Steigerung der Faktormenge keine Ertragssteigerung mehr zu erreichen. Es ergibt sich die linear limitationale Produktionsfunktion (Übersicht 2a).

Ist andererseits ein variabler Faktor nicht beliebig teilbar, ergibt sich eine gebrochene Ertragskurve (Übersicht 2b).

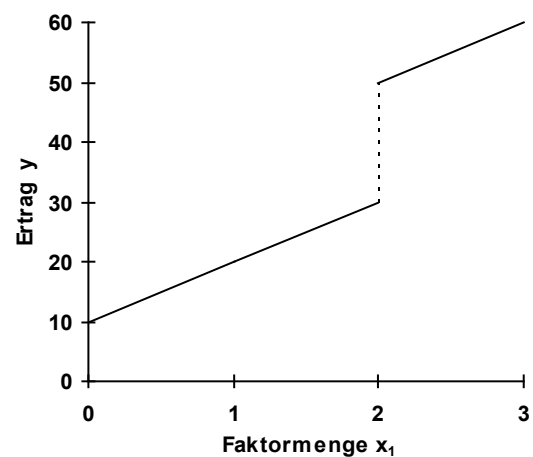
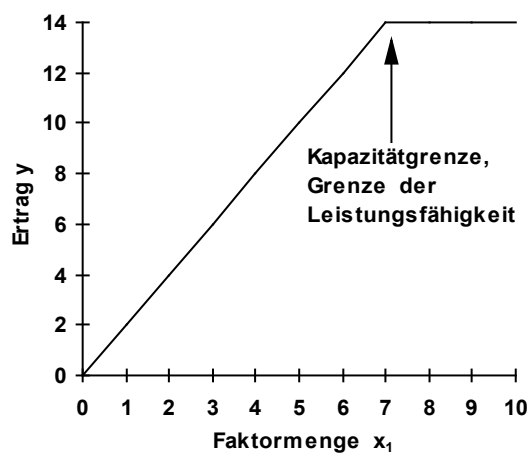
Grundsätzlich sind limitationale und diskontinuierlich Beziehungen auch bei nichtlinearen Produktionsfunktionen denkbar. Da sie zur Klärung der grundlegenden theoretischen Produktionszusammenhänge jedoch nicht erforderlich sind, sollen sie nicht weiter behandelt werden.

Übersicht 1: Lineare Produktionsfunktion

Faktor	Ertrag
x_1	y
0	0
1	2
2	4
3	6
·	·
n	$2n$



Übersicht 2: Linear-diskontinuierliche Produktionsfunktionen



2.1.1.2 Produktionsfunktion mit unterproportionalem Ertragsanstieg

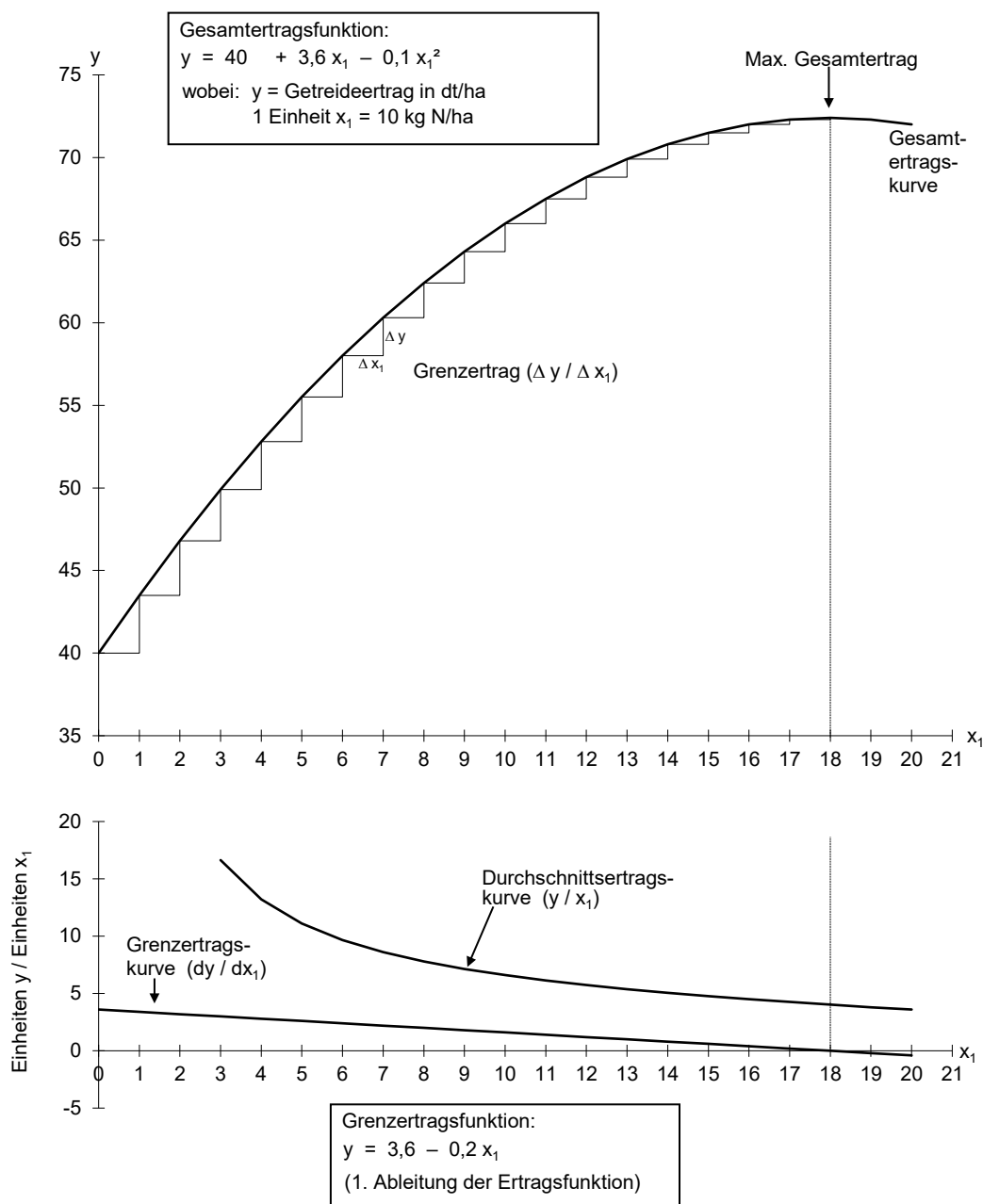
Bei einer unterproportionalen Faktor-Produkt-Beziehung erhöht sich zwar der Ertrag bei steigender Faktoreinsatzmenge, die jeweiligen Zuwachsraten (Grenzertrag) nehmen jedoch bei steigendem Einsatz des betreffenden Produktionsmittels ab und tendieren gegen Null. Gegebenfalls kann bei fortschreitendem Faktoreinsatz der Ertrag nach Erreichen eines Maximums sogar wieder sinken (negativer Grenzertrag).

Der Produktionsfunktion verläuft also degressiv (Übersicht 3). Sie wird allgemein auch als *klassische Produktionsfunktion* oder *ertragsgesetzliche Produktionsfunktion* bezeichnet.

Letzteres deshalb, weil ihr Verlauf Ausdruck für eine grundlegende wirtschaftstheoretische Hypothese ist, die als **Gesetz vom abnehmenden Ertragszuwachs** (Ertragsgesetz) bezeichnet wird. Das Ertragsgesetz drückt aus, dass bei partieller Faktorvariation (ein Faktor variabel, alle übrigen Faktoren konstant) der Produktionszuwachs mit jeder zusätzlich eingesetzten Einheit des variablen Faktors immer geringer wird.

Dieses Gesetz ist in vielen Bereichen der landwirtschaftlichen Produktion zutreffend. Ein (hypothetisches) Beispiel aus der Pflanzenproduktion ist in Übersicht 3 zugrunde gelegt. Untersucht wird die Wirkung der Stickstoffdüngung (X_1) auf den Getreideertrag je ha (y). Ohne Düngung liegt die Produktion bei 40 dt/ha. Durch Steigerung der Stickstoffdüngung um jeweils 10 kg/ha (= 1 Einheit x_1) kann der Ertrag zunächst um jeweils über 3 dt/ha gesteigert werden. Mit zunehmendem Stickstoffeinsatz tendiert der Grenzertrag jedoch gegen Null und wird sogar negativ (Ertragsdepression durch zu hohe Nährstoffkonzentration im Boden). Im oberen Teil der Abbildung sind die fallenden Grenzerträge als Differenzialquotient aus $\Delta y / \Delta x_1$ (also den Ertragszuwachs je 10 kg N) dargestellt. Den gleichen Sachverhalt bringt die Grenzertragskurve im unteren Teil der Abbildung zum Ausdruck. Bei ihrer Berechnung wurden jedoch die Ertragsänderungen bei infinitesimal kleinen Änderungen des Einsatzes von Stickstoff (X_1) zugrunde gelegt (dy / dx_1). Dies entspricht der ersten Ableitung der Ertragsfunktion und gibt somit deren Steigung wieder.

Übersicht 3: Degressive Produktionsfunktion

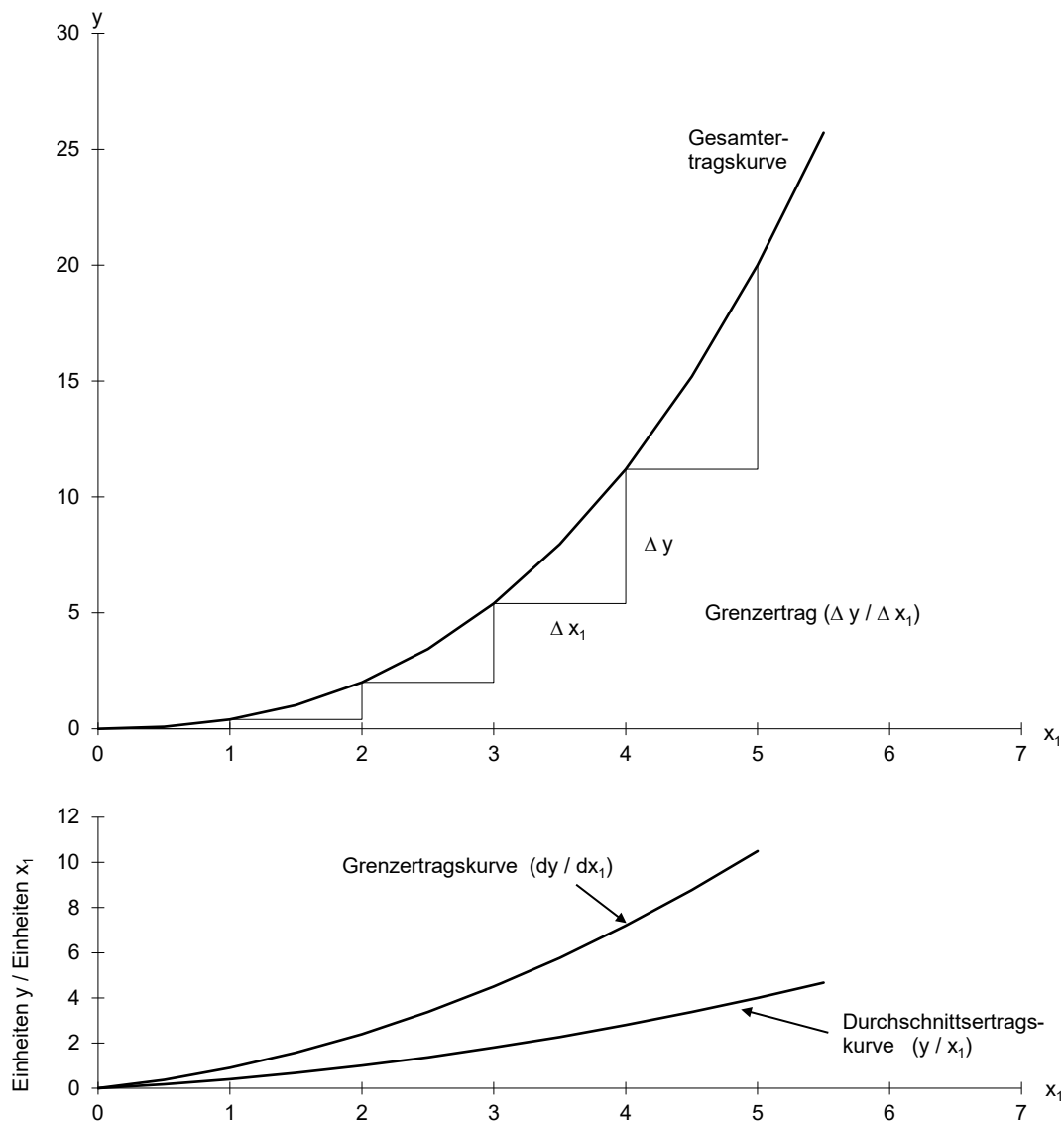


2.1.1.3 Produktionsfunktion mit überproportionalem Ertragsanstieg

Bei steigender Einsatzmenge des jeweiligen Produktionsmittels erhöht sich der Gesamtertrag überproportional. Die jeweiligen Zuwachsraten erhöhen sich demnach mit steigender Intensität der Produktion. Neben dem in Übersicht 4 gezeigten Beispiel mit progressivem *Grenzertragsanstieg* wären auch ein Fall mit linearem Grenzertragszuwachs denkbar.

Grundsätzlich kann ein solcher Funktionsverlauf nicht über den gesamten Bereich des Produktionsmitteleinsatzes angenommen werden. Würde eine derartige Beziehung zwischen Input und Output etwa für den Getreidebau zutreffen, dann wäre es möglich die Weltgetreideproduktion auf minimaler Fläche durchzuführen. Viel eher ist es denkbar, dass eine Produktionsfunktion nur in einem gewissen Bereich des Produktionsmitteleinsatzes einen überproportionalen Ertragsanstieg zeigt (→ 2.1.4)

Übersicht 4: Progressive Produktionsfunktion



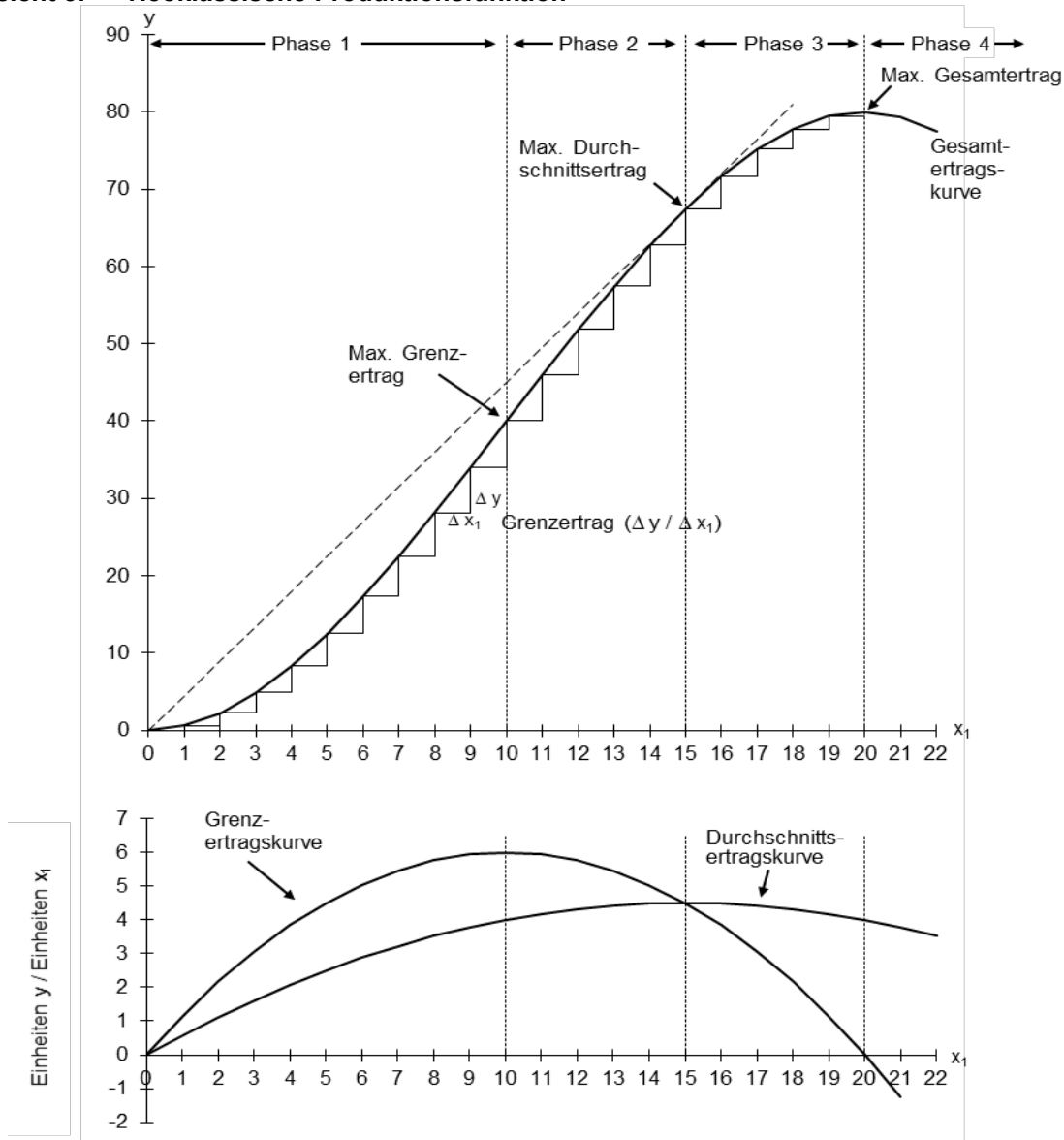
2.1.1.4 Neoklassische Produktionsfunktion

Die neoklassische Produktionsfunktion stellt eine Kombination aus überproportionaler und unterproportionaler Produktionsfunktion dar. Der Gesamtertrag steigt zunächst überproportional bis zu einem Wendepunkt an und verläuft anschließend mit sinkenden Wachstumsraten. Nach überschreiten des Ertragsmaximums nimmt der Ertrag wieder ab (negative Grenzerträge).

Hinter diesem Verlauf steckt die Annahme, dass der betrachtete Produktionsfaktor zunächst sehr knapp und deshalb ertragsbestimmend ist (Gesetz des Minimums). Der Einfluss des betrachteten Produktionsfaktors nimmt mit steigendem Einsatz relativ ab. Gleichzeitig werden die übrigen (in der Funktion als fix unterstellten) Faktoren immer knapper und damit ihrerseits ertragsbestimmender.

Der maximale Grenzertrag der Funktion liegt im progressivem Teil während der Durchschnittsertrag sein Maximum am Wendepunkt zwischen progressivem und degressivem Bereich erreicht. Solange der Grenzertrag der letzten eingesetzten Einheit über dem Durchschnittsertrag liegt, steigt die Durchschnittsertragskurve an, da jede weitere Steigerung des Produktionsmitteleinsatzes zu einer Erhöhung des Durchschnittsertrages führt. Im Punkt des maximalen Durchschnittsertrages weisen Grenzertrag und Durchschnittsertrag die gleiche Höhe auf (Schnittpunkt der beiden Kurven). Steigert man das Faktoreinsatzniveau über diesen Punkt hinaus, so geht der Durchschnittsertrag zurück, weil das Niveau des Grenzertrages unter dem des Durchschnittsertrages liegt.

Übersicht 5: Neoklassische Produktionsfunktion



Zusammenfassend lassen sich in dieser (idealisierten) Form der Produktionsfunktion vier Phasen unterscheiden. Die Maxima der Grenz-, Durchschnitts- und Gesamtertragskurven markieren jeweils die Grenzen zwischen den einzelnen Phasen:

Phase	Gesamtertrag y	Durchschnittsertrag y / x_1	Grenzertrag dy / dx_1	Phasenbereich
Phase 1	positiv steigend	positiv steigend	positiv steigend	Ursprung bis Wendepunkt
Phase 2	positiv steigend	positiv steigend	positiv fallend	Wendepunkt bis Durchschnittsertragsmaximum
Phase 3	positiv steigend	positiv fallend	positiv fallend	Durchschnittsertragsmaximum bis Gesamtertragsmaximum
Phase 4	positiv fallend	positiv fallend	negativ fallend	Gesamtertragsmaximum und darüber hinaus

2.1.2 Bestimmung der optimalen Einsatzmenge bei einem variablen Faktor

Nach der Darstellung grundlegender rein natürlicher Faktor-Produkt-Beziehungen geht es nunmehr um die Frage nach den Gesetzmäßigkeiten für die Ermittlung der optimalen Einsatzmenge eines variablen Faktors abzuleiten. Dabei ist diejenige Faktoreinsatzmenge zu ermitteln, bei der der Gewinn ein Maximum erreicht. Die Bestimmung der optimalen Einsatzmenge des beliebig teilbaren variablen Faktors kann in tabellarischer, geometrischer und algebraischer Form erfolgen. In jedem Fall ist es erforderlich, die natürlichen Mengen der Produkte und Faktoren zu bewerten, d.h. neben den rein physischen Input-Output-Beziehungen ist die Kenntnis der Faktor- und Produktpreise Voraussetzung für die Ermittlung des wirtschaftlichen Optimums.

Die optimale Einsatzmenge eines variablen Faktors wird auch als die **optimale spezielle Intensität** bezeichnet.

Im Mittelpunkt der folgenden Überlegungen steht das "Grenzproduktivitätsprinzip". Es besagt, dass z.B. die Steigerung des Düngereinsatzes solange vorteilhaft ist, wie der daraus resultierende, in Geld gemessene Leistungszuwachs (Grenzleistung, Grenzerlös, Grenzwertprodukt) größer ist als der durch die Steigerung des Faktoreinsatzes bedingte Kostenzuwachs (Grenzkosten).

Unter **Grenzkosten** versteht man also den Kostenzuwachs, der aus einer Steigerung der Einsatzmenge des variablen Faktors um eine Faktoreinheit resultiert. Unter **Grenzleistung** (Grenzerlös, Grenzwertprodukt) versteht man den Leistungszuwachs (Erlöszuwachs), der aus einer Steigerung der Einsatzmenge des variablen Faktors um eine Faktoreinheit resultiert.

Der **optimale Faktoreinsatz** ist bei abnehmendem Ertragszuwachs erreicht, wenn der Grenzerlös den Grenzkosten ist. Im Optimum ist somit folgende Bedingung erfüllt:

$$\Delta y \times p = \Delta x_1 \times q_1$$

wobei: Δy = Änderung des Ertrages
 p = Preis je Produkteinheit
 Δx_1 = Änderung des Faktoreinsatzes
 q_1 = Preis je Faktoreinheit

Solange bei fortschreitender Steigerung eines Faktors der Grenzerlös die Grenzkosten übersteigt, liegt das Einsatzniveau des variablen Faktors noch unterhalb des Optimums. Sobald der Grenzerlös geringer ist als die Grenzkosten ist das Optimum überschritten.

Durch Umformung der Grenzproduktivitätsgleichung in $\frac{\Delta y}{\Delta x_1} \times p = q_1$ ergibt sich folgende Aussage:

Die optimale Einsatzmenge (maximaler Gewinn) ist dann erreicht, wenn die Grenzleistung (Grenzerlös) die aus einer zusätzlichen Faktoreinheit resultiert, dem Faktorpreis gleich ist.

Berücksichtigt man, dass sich aus der Differenz von Grenzerlös und Grenzkosten der Grenzgewinn errechnen lässt sich der Sachverhalt wie folgt zusammenfassen:

Optimale Faktoreinsatzmenge noch nicht erreicht	Grenzleistung > Grenzkosten	Grenzerlös durch eine zus. Faktoreinheit > Faktorpreis	Grenzgewinn ist positiv	Gesamtgewinn ist steigend
Optimale Faktoreinsatzmenge ist erreicht	Grenzleistung = Grenzkosten	Grenzerlös durch eine zus. Faktoreinheit = Faktorpreis	Grenzgewinn ist Null	Gesamtgewinn ist maximal
Optimale Faktoreinsatzmenge ist überschritten	Grenzleistung < Grenzkosten	Grenzerlös durch eine zus. Faktoreinheit < Faktorpreis	Grenzgewinn ist negativ	Gesamtgewinn ist fallend

Zur Wahrung der Übersichtlichkeit beschränken sich die weiteren Ausführungen auf nur eine Form der Produktionsfunktion, nämlich jener mit unterproportionalem Ertragsanstieg. Sie verkörpert das *Gesetz vom abnehmenden Ertragszuwachs* und ist auf viele Bereiche der landwirtschaftlichen Produktion anwendbar.

Für das unter Punkt 2.1.1.2 erwähnte Beispiel der Stickstoffdüngung zu Getreide soll nun in tabellarischer, geometrischer und algebraischer Form die optimale spezielle Intensität des Stickstoffeinsatzes ermittelt werden. Zur Darstellung der naturalen Produktionsfunktion sei auf die dortigen Ausführungen und die Abbildung verwiesen.

Folgende Daten sind bekannt:

Ertragsfunktion $y = 40 + 3,6 x_1 - 0,1 x_1^2$
wobei: y = Getreideertrag in dt/ha; 1 Einheit x_1 = 10 kg N/ha

Produktpreis (p): 15,00 €/dt Getreide

Faktorpreis (q_1): 0,90 €/kg N-Reinnährstoff (einschl. Ausbringung)
= 9,00 €/10 kg N (1 Einheit x_1)

Konstante Kosten: 550 €/ha für die übrigen konstanten Produktionsmittel X_2 bis X_n
(Betrag wurde um die Flächenprämie gekürzt!)

a) Tabellarische Lösung

Die tabellarische Ermittlung der optimalen Düngereinsatzmenge erfolgt nach der Differenzrechnung (Grenzwertrechnung) und (zum Vergleich) als Gesamtwertrechnung.

Das Vorgehen bei der Differenzrechnung gestaltet sich wie folgt:

- 1) Man ermittelt die den einzelnen Faktoreinsatzstufen zugeordnete Zunahme der Produktion, d.h. den Grenzertrag je Faktoreinheit.
- 2) Man multipliziert den Grenzertrag und die Zunahme des Faktoreinsatzes mit den Produkt- und Faktorpreisen und ermittelt den Erlös- bzw. Kostenzuwachs der einzelnen Faktoreinsatzstufen.
- 3) Man vergleicht den Erlöszuwachs mit dem Kostenzuwachs und ermittelt diejenige Faktoreinsatzstufe, bei der das Grenzproduktivitätsprinzip (Grenzerlös = Grenzkosten) erfüllt ist.

Faktor- einsatz 1x₁=10kg N je ha	Gesamtwertrechnung						Grenzwertrechnung			
	Ges.- ertrag	Ges.- erlös	N- Einsatz	N- Kosten	Konst. Kosten	Ges.- Gewinn	Grenz- ertrag	Grenz- erlös	Grenz- kosten	Grenz- gewinn
	dt/ha	€/ha	kg/ha	€/ha	€/ha	€/ha	dt/10kgN	€/ 10 kg N		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	40,0	600	0	0	550	50,0				
1	43,5	653	10	9	550	93,5	3,50	52,50	9,00	43,50
2	46,8	702	20	18	550	134,0	3,30	49,50	9,00	40,50
3	49,9	749	30	27	550	171,5	3,10	46,50	9,00	37,50
4	52,8	792	40	36	550	206,0	2,90	43,50	9,00	34,50
5	55,5	833	50	45	550	237,5	2,70	40,50	9,00	31,50
6	58,0	870	60	54	550	266,0	2,50	37,50	9,00	28,50
7	60,3	905	70	63	550	291,5	2,30	34,50	9,00	25,50
8	62,4	936	80	72	550	314,0	2,10	31,50	9,00	22,50
9	64,3	965	90	81	550	333,5	1,90	28,50	9,00	19,50
10	66,0	990	100	90	550	350,0	1,70	25,50	9,00	16,50
11	67,5	1.013	110	99	550	363,5	1,50	22,50	9,00	13,50
12	68,8	1.032	120	108	550	374,0	1,30	19,50	9,00	10,50
13	69,9	1.049	130	117	550	381,5	1,10	16,50	9,00	7,50
14	70,8	1.062	140	126	550	386,0	0,90	13,50	9,00	4,50
15	71,5	1.073	150	135	550	387,5	0,70	10,50	9,00	1,50
16	72,0	1.080	160	144	550	386,0	0,50	7,50	9,00	-1,50
17	72,3	1.085	170	153	550	381,5	0,30	4,50	9,00	-4,50
18	72,4	1.086	180	162	550	374,0	0,10	1,50	9,00	-7,50
19	72,3	1.085	190	171	550	363,5	-0,10	-1,50	9,00	-10,50
20	72,0	1.080	200	180	550	350,0	-0,30	-4,50	9,00	-13,50

Die einzelnen Spalten erklären und berechnen sich wie folgt:

- 1 Variabler Faktoreinsatz x_1 (1 Einheit $x_1 = 10$ kg N je ha)
- 2 Ertrag y
- 3 Gesamterlös = $y \times p$
- 4 N-Einsatzmenge (Düngemenge)
- 5 N-Kosten = $x_1 \times q_1$
- 6 Kosten der übrigen konstanten Produktionsmittel X_2 bis X_n
- 7 Gesamtgewinn = Gesamterlös – N-Kosten – konstante Kosten
- 8 Grenzertrag = $\Delta y / \Delta x_1$
- 9 Grenzerlös = $(\Delta y / \Delta x_1) \times p$
- 10 Grenzkosten = $\Delta x_1 \times q_1$ (oder einfach q_1 da $\Delta x_1 = 1$)
- 11 Grenzgewinn = Grenzerlös – Grenzkosten

Gemäß der Kalkulationstabelle muss sich das optimale Faktoreinsatzniveau im Bereich von $X_1 = 15$ (= 150 kg N / ha) befinden. Folgende Bedingungen sind dort erfüllt:

- Gesamtgewinn maximal
- Grenzgewinn nahe Null
- Grenzerlös $\approx$ Grenzkosten
- Grenzerlös $\approx$ Faktorpreis

Um die Kalkulationsgenauigkeit zu erhöhen müsste für die Faktoreinsatzstufen ein kleinerer Wert verwendet werden.

b) graphische Lösung

Bei der geometrischen Lösung werden auf der Abszisse die naturale Einheiten des variablen Faktors eingetragen. Im Gegensatz zur naturalen Produktionsfunktion wird für die Ordinate nun der monetäre Maßstab verwendet. Eingetragen wird nun die Erlösfunktion ($f(x_1) \times p$) und die Kostengerade für die Stickstoffkosten ($y = q_1 \times x_1$).

Der Abstand zwischen der Erlöskurve und Faktorkostengerade gibt den Differenzbetrag für die jeweiligen Einsatzniveaus für Stickstoff an. Der maximale Differenzbetrag (Optimum) wird dort

erreicht, wo Grenzertrag und Grenzkosten gleich hoch sind, d.h. Erlöskurve und Kostengerade die gleiche Steigung aufweisen. Der Punkt des optimalen Faktoreinsatzniveaus lässt sich nun graphisch durch jene Parallele zur Kostengeraden bestimmen, die die Erlöskurve tangiert.

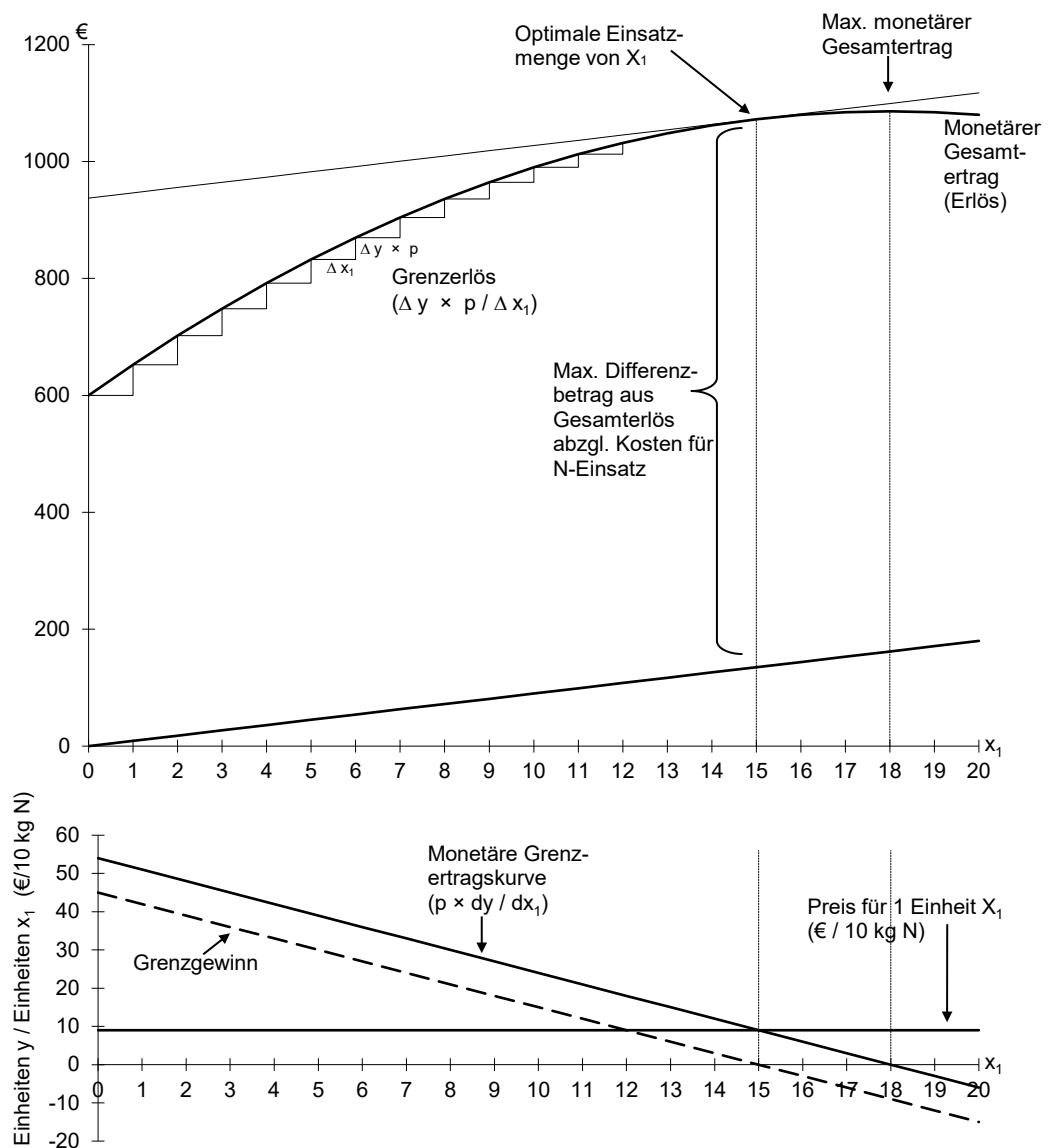
Durch Fällen des Lotes vom Tangentialpunkt auf die Abszisse kann die optimale Faktoreinsatzmenge abgelesen werden.

Soll neben dem maximalen Differenzbetrag auch die maximale Gewinnhöhe graphisch ermittelt werden müssen zusätzlich zu den N-Kosten auch die festen Kosten eingetragen werden. Der Abstand zwischen der Gesamterlöskurve und der Gesamtkostengerade (variable Kosten + feste Kosten) zeigt dann die Höhe des Gewinnes. Die Höhe des Gewinnmaximums wie auch des maximalen Differenzbetrages lassen sich an der Ordinate ablesen.

Im unteren Teil der Abbildung ist dargestellt dass auch die Optimumsbedingungen

- Grenzerlös = Faktorpreis
 - Grenzerlös = Grenzkosten
- für die geometrische Lösung erfüllt sind.

Übersicht 6: Bestimmung des optimalen Faktoreinsatzes im Einproduktbetrieb



c) algebraische Lösung

In den folgenden Berechnungen werden Zwischenergebnisse gerundet angegeben jedoch in weiteren Rechnungen ungerundet verwendet.

Das mathematische Ziel bei der Festlegung des optimalen Einsatzumfanges eines variablen Faktors besteht darin, jenes Faktoreinsatzniveau zu bestimmen, bei dem der maximale Gewinn erzielt wird. Bei variablen Einsatzmengen von X_1 entspricht der Gewinn (G) der Differenz aus Erlös ($y \times p$) und den Kosten für den variablen Faktor X_1 sowie den Kosten für die konstanten Faktoren (FK).

Es ergibt sich folgende allgemeine Gleichung:

$$G = y \times p - x_1 \times q_1 - FK$$

Für das gewählte Beispiel:

$$G = y \times 15,00 - x_1 \times 9,00 - 550$$

Setzt man für y den rechten Teil der Ertragsfunktion ein so ergibt sich allgemein:

$$G = f(x_1) \times p - x_1 \times q_1 - FK$$

Für das gewählte Beispiel errechnet sich der Gewinn somit nach folgender Gleichung:

$$G = (40 + 3,6 x_1 - 0,1 x_1^2) \times 15,00 - x_1 \times 9,00 - 550$$

$$G = 50 + 45 x_1 - 1,5 x_1^2$$

Als Bedingung für das Gewinnmaximum gilt

- a) dass der Grenzgewinn an dieser Stelle gleich Null ist,
- b) dass der Grenzerlös an dieser Stelle gleich dem Faktorpreis ist.

Für die weitere Lösung kann alternativ eine der beiden Bedingungen herangezogen werden. Zum besseren Vergleich sollen hier beide Wege dargestellt werden:

Alternative a:

Mathematisch ergibt sich der Grenzgewinn (=Steigung der Gewinnfunktion) als 1. Ableitung der Gewinnfunktion:

$$\begin{aligned} \text{Gewinnfunktion:} \quad G &= f(x_1) \times p - x_1 \times q_1 - FK \\ G &= 50 + 45 x_1 - 1,5 x_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Grenzgewinnfunktion:} \quad dG / dx_1 &= f'(x_1) \times p - q_1 \\ dG / dx_1 &= 45 - 3 x_1 \end{aligned}$$

Allgemein gilt im Gewinnmaximum also die Bedingung:

$$f'(x_1) \times p - q_1 = 0 \quad (\text{Grenzgewinn} = 0)$$

Im Beispiel:

$$45 - 3 x_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 15,00 \quad (= 150 \text{ kg N /ha})$$

Alternative b

Mathematisch ergibt sich der Grenzerlös als 1. Ableitung der Erlösfunktion:

$$\begin{aligned} \text{Ertragsfunktion } f(x_1): \quad y &= 40 + 3,6 x_1 - 0,1 x_1^2 \\ \text{Erlösfunktion } f(x_1) \times p: \quad y \times p &= 600 + 54 x_1 - 1,5 x_1^2 \\ \text{Grenzerlösfunktion } f'(x_1) \times p: \quad dy/dx_1 \times p &= 54 - 3 x_1 \end{aligned}$$

Allgemein gilt im Gewinnmaximum die Bedingung:

$$f'(x_1) \times p = q_1 \quad (\text{Grenzerlös} = \text{Faktorpreis})$$

Im Beispiel:

$$54 - 3 x_1 = 9,00 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 15,00 \quad (= 150 \text{ kg N /ha})$$

Im Beispiel erreicht der Gewinn bei einem Faktoreinsatz von $x_1 = 15$ (= 150 kg N / ha) einen Extremwert. Es kann sich dabei sowohl um einen Maximalwert wie um einen Minimalwert handeln, denn die 1. Ableitung der Gewinnfunktion wäre in beiden Fällen gleich Null. Um mit Sicherheit sagen zu können, dass es sich um das Gewinnmaximum handelt, muss eine weitere Bedingung erfüllt sein, nämlich jene dass der Grenzgewinn mit zunehmendem Faktoreinsatz abnimmt. Dies ist erfüllt wenn die Steigung der Grenzgewinnfunktion negativ ist. Mathematisch ergibt sich die Steigung wiederum aus der Ableitung der Grenzgewinnfunktion, also aus der 2. Ableitung der Gewinnfunktion:

Die Bedingung lautet demnach allgemein:

$$d^2G / d^2x_1 < 0$$

$$f''(x_1) \times p < 0$$

Im Beispiel wird diese Bedingung erfüllt:

$$f''(x_1) \times p = -3 (< 0!)$$

Da der Preis für das Produkt immer einen positiven Wert hat, ist diese Bedingung auch dann immer automatisch erfüllt, wenn die zweite Ableitung der Produktionsfunktion negativ ist, d.h. wenn der Grenzertrag einen fallenden Verlauf aufweist.

Der erzielte maximale Gewinn muss nicht zwangsläufig positiv sein. Die Aufnahme der Produktion ist jedoch erst dann ökonomisch sinnvoll, wenn der monetäre Ertrag (Erlös, $p \times y$) die Kosten für das variable Produktionsmittel ($q_1 \times x_1$) übersteigen, wenn also:

$$y \times p > x_1 \times q_1$$

Im Beispiel wird auch diese Bedingung erfüllt, denn bei einem Faktoreinsatz von $x_1 = 15$ (150 kg N/ha) 71,5 dt /ha Getreide erzeugt und somit ein Erlös von 1073 € / ha erwirtschaftet werden.

Nach Abzug der Kosten für Stickstoff und die festen Faktoren beträgt der Gewinn im Optimum 387,5 €/ha:

Ertrag im Optimum:

$$y = 40 + 3,6 x_1 - 0,1 x_1^2$$

$$y = 40 + 3,6 \times 15 - 0,1 \times 15^2$$

$$y = 71,50 \text{ dt / ha}$$

Erlös im Optimum

$$y \times p = 71,5 \text{ dt/ha} \times 15,00 \text{ €/dt} = 1073 \text{ €/ha}$$

Kosten im Optimum:

$$\text{Variabler Faktor: } 15,00 \text{ Einheiten } X_1 \times 9,00 \text{ €/Einh.} = 135 \text{ €/ha}$$

$$\text{Feste Faktoren: } 550 \text{ €/ha}$$

Gewinn im Optimum:

$$G = y \times p - x_1 \times q_1 - FK$$

$$G = 1073 - 135 - 550 = 387,50 \text{ €/ha}$$

alternative Berechnung über Gewinnfunktion:

$$G = 50 + 45 x_1 - 1,5 x_1^2$$

$$G = 50 + 45 \times 15 - 1,5 \times 15^2$$

$$G = 387,50 \text{ €/ha}$$

2.2 Zwei variable Faktoren

In der Regel werden zur Herstellung eines Produktes nicht nur ein Faktor sondern mehrere Faktoren eingesetzt. Hieraus ergibt sich folgende Frage: Welche Kombination der Produktionsfaktoren ist zu wählen, damit eine bestimmte Produktmenge y mit den geringstmöglichen Kosten hergestellt wird (Problem der Minimalkostenkombination). Dabei muss es sich um solche Produktionsfaktoren handeln, die zumindest in gewissen Grenzen gegeneinander austauschbar sind (Substitutionsbeziehung).

2.2.1 Produktionsbeziehungen zwischen zwei variablen Faktoren

Die Produktionsfunktion mit zwei variablen Faktoren hat folgende Form:

$$y = f(x_1, x_2 \mid x_3, \dots, x_n) \quad \text{wobei alle Faktoren hinter dem senkrechten Strich fix}$$

Durch Weglassen der konstant gehaltenen Faktoren erhält man vereinfacht

$$y = f(x_1, x_2)$$

Die Gleichung besagt, dass die Produktionsmenge y funktional vom Einsatz der unabhängig voneinander zu variierenden Faktoren x_1 und x_2 abhängt, wenn die anderen Produktionsmittel x_3 bis x_n konstant gehalten werden. Dabei beeinflussen diese variablen Produktionsmittel den Ertrag unterschiedlich wenn man das Mengenverhältnis der Faktoren zueinander ändert.

Ein (hypothetisches) Beispiel aus der Düngung mag dies verdeutlichen.

Der Roggenertrag y ist eine Funktion der Einsatzmengen der Faktoren P_2O_5 -Düngung (x_1) und K_2O -Düngung (x_2). Versuche mit unterschiedlichen Einsatzmenge von Phosphat und Kali-Dünger zu Roggen mögen die in nachfolgender Übersicht aufgeführten naturalen Kornenerträge je ha ergeben.

Übersicht 7: Naturale Roggenerträge bei Variation der P_2O_5 und K_2O Düngung

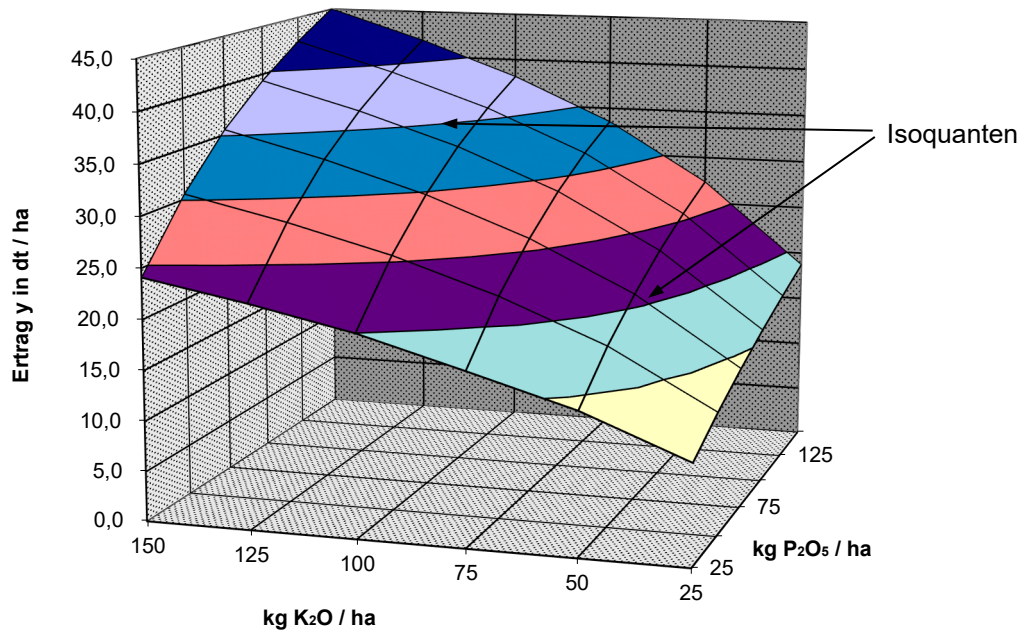
Erträge in dt/ha		x_1 : Düngereinsatz in kg P_2O_5 /ha						(hypothetisches Beispiel !!)
		25	50	75	100	125	150	
x_2 : Düngereinsatz kg K_2O / ha	150	24,1	30,5	35,5	39,3	42,4	45,0	$y = 40$ dt
	125	22,2	28,2	32,9	36,5	39,4	41,8	
	100	20,0	25,5	29,8	33,2	35,9	38,1	
	75	17,1	22,1	25,9	29,0	31,5	33,5	$y = 30$ dt
	50	14,1	17,9	20,9	23,4	25,5	27,3	$y = 20$ dt
	25	10,0	12,2	14,1	15,8	17,3	18,7	

Quelle: Steinhauser, H., C. Langbehn und U. Peters: Einführung in die landwirtschaftliche Betriebslehre, Allgemeiner Teil, Weihenstephan und Kiel 1992

Der Ertrag je ha steigt sowohl bei zunehmendem Einsatz der K_2O -Düngung wie auch der P_2O_5 -Düngung an. Hält man entweder den K_2O - oder den P_2O_5 Dünger auf konstantem Niveau, so bewirkt eine zunehmende Steigerung des Einsatzes des anderen Düngers eine Erhöhung des Ertrages. Auch hier tritt das "Gesetz vom abnehmendem Ertragszuwachs" wieder deutlich in Erscheinung. Die gestrichelten Linien in der Versuchsdatentabelle sollen verdeutlichen, dass ein bestimmter Roggenertrag mit verschiedenen Kombinationen der beiden Dünger herstellbar ist.

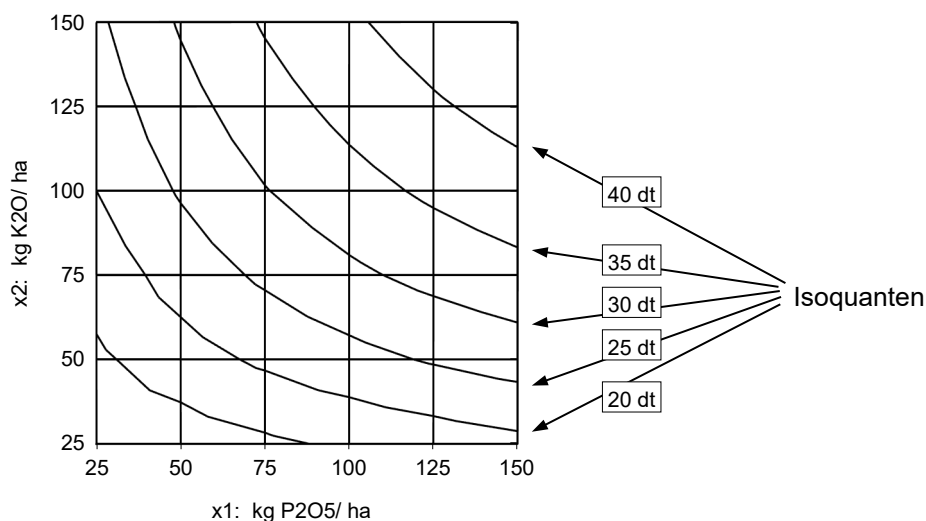
Bildet man die zugehörige Produktionsfunktion graphisch ab, benötigt man nunmehr eine dreidimensionale Darstellung. Die Produktionsfunktion entspricht der Oberfläche des so genannten Ertragsgebirges. Legt man durch ein solches Ertragsgebirge mehrere Schnitte parallel zur x_1, x_2 Ebene, so erhält man Linien, die Erträge gleicher Höhe angeben. Solche Linien werden als Isoertragslinien oder Isoquanten bezeichnet. Sie können als Höhenlinien des Ertragsgebirges angesehen werden. Die Isoquante gibt alle Kombinationsmöglichkeiten der beiden Dünger zur Erzielung des gleichen Ertrages wieder.

Übersicht 8: Produktion und Faktoreinsatz bei zwei variablen Faktoren



Betrachtet man die dreidimensionale Darstellung in der Draufsicht, so ergibt sich eine Sichtweise die einer Landkarte ähnelt. Die Isoquanten können auch hier wieder als "Höhenlinien" gedeutet werden. In dieser Ansicht kann nun leicht abgelesen werden, welche Düngemittelkombinationen den gleichen Ertrag erbringen. Der Abstand, den die Isoquanten jeweils zueinander aufweisen lässt Rückschlüsse auf die Steigung des Ertragsgebirges zu.

Übersicht 9: Isoquanten ausgewählter Ertragsniveaus



Aus dem Verlauf der Isoquanten lassen sich bestimmte wirtschaftlich relevante Schlüsse ziehen. In Übersicht 10 ist die Isoquante für einen Roggenertrag von 20 dt/ha grafisch dargestellt. Aus dem Verlauf der Isoquante lässt sich das "Gesetz von der abnehmenden Grenzrate der Substitution" ableiten:

Bei fortschreitendem Ersatz von X₂ durch X₁ nimmt die eingesparte Menge des substituierten Faktors X₂ kontinuierlich ab. Der Wert des Substitutionsverhältnisses (=Grenzrate der Substitution) wird geringer.

Mit dem Ansatz $GRS = - \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$

lässt sich die mittlere Grenzrate der Substitution für eine bestimmte Änderung des Faktoreinsatzes von X_1 errechnen. Da Δx_2 i.d.R. ein negativer Wert ist, dient das negative Vorzeichen der Gleichung nur dazu, die Substitutionsrate als positiven Wert darzustellen.

Beispiel: Durch Erhöhung des P_2O_5 -Einsatzes von 20 kg/ha auf 30 kg/ha ergibt sich eine Einsparung von 25,6 kg/ha K_2O ohne dass der Ertrag (20 dt/ha) sich verändert.

$$GRS = - \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = - \frac{\Delta K_2O}{\Delta P_2O_5} = - \frac{-25,62}{10} = 2,562$$

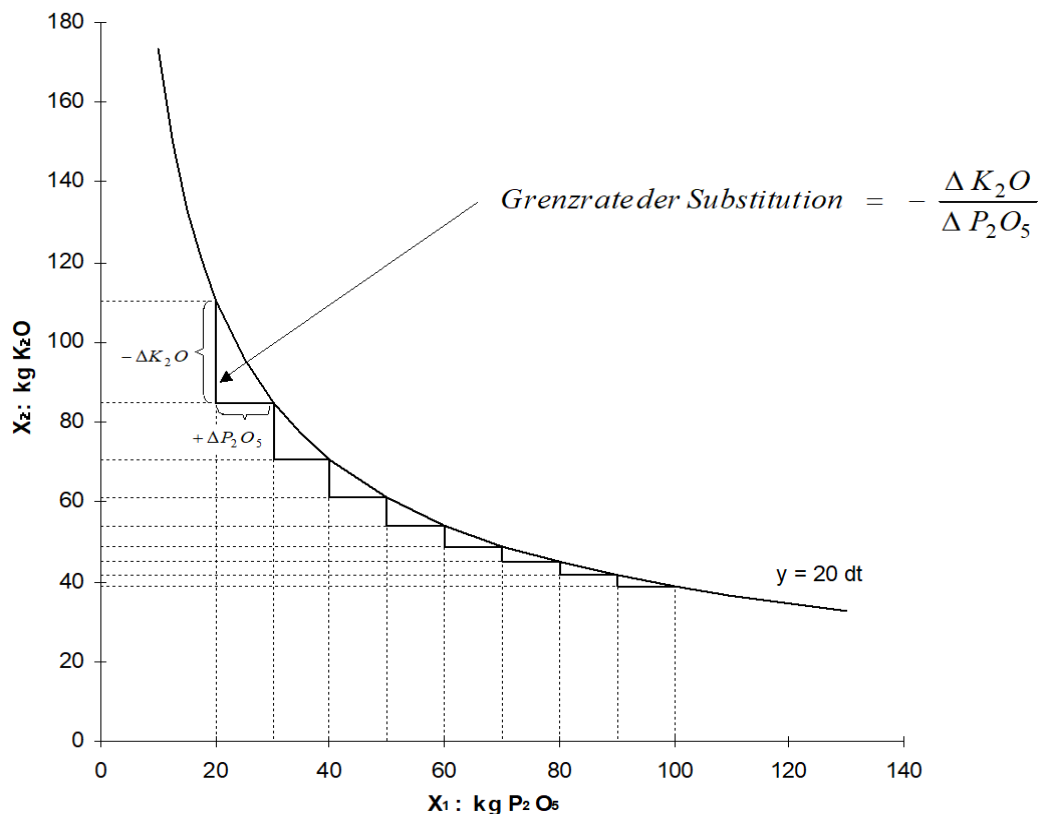
Der errechnete Wert von 2,56 sagt aus, dass in diesem Bereich der Isoquante durch die zusätzliche Gabe von 1 kg P_2O_5 /ha im Mittel 2,56 kg K_2O /ha eingespart werden können.

Um die Grenzrate der Substitution nicht nur für Bereiche sondern für bestimmte Punkte festzustellen, muss statt des Differenzquotienten der Differenzialquotient gebildet werden:

$$GRS = - \frac{d x_2}{d x_1}$$

Die Grenzzraten der Substitution gibt somit die Steigung der Isoquante in bestimmten Punkten an und wird über die 1. Ableitung der Isoquante bestimmt.

Übersicht 10: Nichtlineare Isoquante mit abnehmender Grenzrate der Substitution



2.2.2 Bestimmung der optimalen Faktorkombination (Minimalkostenkombination)

In diesem Abschnitt wird die Frage nach derjenigen Kombination der beiden Düngemittel gestellt, die die Herstellung einer bestimmten Menge an Roggen (z.B. 20 dt/ha) mit den geringsten Düngungskosten ermöglicht. Die Herstellung von 20 dt Roggen ist z.B. möglich mit 20 kg P_2O_5 und ca. 110 kg K_2O /ha. Bei Düngerpreisen von 0,85 €/kg P_2O_5 und 0,65 €/kg K_2O entstehen an Düngungskosten insgesamt 88,50 €/ha. Führt man nun (siehe Übersicht 10) eine Substitution von K_2O durch P_2O_5 durch, so ist diese ökonomisch nur dann sinnvoll, wenn die mögliche Einsparung an Kosten für die K_2O -Düngung größer ist als die zusätzlich entstehenden Kosten durch einen vermehrten Einsatz von P_2O_5 . Anders ausgedrückt: Eine Substitution der K_2O Düngung (Faktor X_2) durch die P_2O_5 Düngung (Faktor X_1) ist nur dann ökonomisch vertretbar, wenn sie zu einer Verminderung der Düngungskosten führt, d.h. wenn

$$-\Delta x_2 \times q_2 > \Delta x_1 \times q_1 \quad \text{wobei:} \quad \begin{array}{l} q_1 = \text{Preis Faktor } X_1 \text{ je Einheit} \\ q_2 = \text{Preis Faktor } X_2 \text{ je Einheit} \end{array}$$

abs.

Folglich verursacht diejenige Kombination der beiden Dünger zur Erreichung eines bestimmten Ertrages y die geringstmöglichen Kosten, bei der die einzusparenden Kosten durch eine Verminderung der K_2O -Düngung (Faktor X_2) gerade so hoch sind, wie die durch einen vermehrten Einsatz der P_2O_5 -Düngung bedingten zusätzlichen Kosten. Die so genannte Minimalkostenkombination ist also dann erreicht, wenn folgende Gleichung erfüllt ist:

$$-\Delta x_2 \times q_2 = \Delta x_1 \times q_1 \quad \text{oder umgeformt:} \quad -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{q_1}{q_2}$$

abs.

Die optimale Kombination zweier Faktoren zur Erzeugung eines bestimmten Ertrages ist in dem Punkt der Isoquante erreicht, in dem die Grenzrate der Substitution gleich dem umgekehrten Preisverhältnis der Faktoren ist.

Bei infinitesimal kleinen Änderungen geht der Differenzquotient in den Differentialquotienten über:

$$-\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{q_1}{q_2}$$

Für die algebraische Ermittlung der Minimalkostenkombination ergibt sich hieraus die entscheidende Optimum-Bedingung. Der Differentialquotient ergibt sich aus der ersten Ableitung der Isoquanten-Funktion (Steigung der Isoquante).

Kalkulationsbeispiel:

Eine bestimmte pflanzenbauliche Leistung wird gegenwärtig durch den Einsatz von saisonalen Lohnarbeitskräften (10 €/h) erbracht. Es besteht die Möglichkeit, einen Teil der Arbeitszeit durch den Einsatz einer Spezialmaschine eines Lohnunternehmers (30 €/h pauschal mit Fahrer) zu ersetzen. Bestimmte Arbeiten können jedoch nur von Hand erledigt werden, so dass mit zunehmendem Maschineneinsatz immer weniger Arbeitszeit eingespart werden kann bis hin zu dem Punkt, dass ein weiterer Maschineneinsatz überhaupt keine Arbeitszeiteinsparung mehr bringt:

Maschinen- einsatz Mh/ha	Arbeits- einsatz AKh/ha	Grenzrate der Substitut.	Maschinen- kosten €/ha	Arbeits- kosten €/ha	Gesamt kosten €/ha
0	100		0	1.000	1.000
1	91	9	30	910	940
2	84	7	60	840	900
3	79	5	90	790	880
4	76	3	120	760	880
5	75	1	150	750	900
6	75	0	180	750	930
7	75	0	210	750	960

Die Minimalkostenkombination für den Einsatz von Arbeitsstunden (AKh) und Maschinenstunden (Mh) liegt gemäß der Tabelle zwischen 3 und 4 Mh/ha (79 bis 76 AKh/ha). Mit jeder anderen angegebenen Kombination lässt sich zwar ebenfalls die Arbeit gleich gut erledigen, jedoch nur mit höheren Kosten und infolgedessen nur mit einem geringeren Gewinn.

Für eine genauere Bestimmung des Optimums müssten die Substitutionsschritte verkleinert werden.

Die Bestimmung der optimalen Faktorkombination lässt sich auch relativ einfach auf geometrischem Wege durchführen. In nachfolgender Übersicht ist die relevante Isoquante dargestellt. Sie gibt alle Kombinationen der Faktoren X_1 (Maschine) und X_2 (Arbeitskräfte) an, die eine Erledigung einer bestimmten Arbeit ermöglichen. Der unterstellte Funktionsverlauf von $x_2 = 100 - 10x_1 + x_1^2$ gilt jedoch nur bis der Funktionsverlauf ein Minimum erreicht, da ab diesem Punkt keine weitere Arbeitseinsparung mehr erfolgt.

Um die billigste Kombination ausfindig zu machen, muss die Isoquante mit den Kosten in Verbindung gebracht werden. Dies geschieht durch die Einzeichnung von so genannten Isokostenlinien. Unter einer Isokostenlinie verstehen wir eine Linie, auf der all jene Kombinationen der Produktionsmittel X_1 und X_2 liegen, die die gleichen Kosten (VK, variable Kosten) verursachen.

Folglich lautet die Gleichung einer Isokostenlinie:

$$VK = q_1 \times x_1 + q_2 \times x_2$$

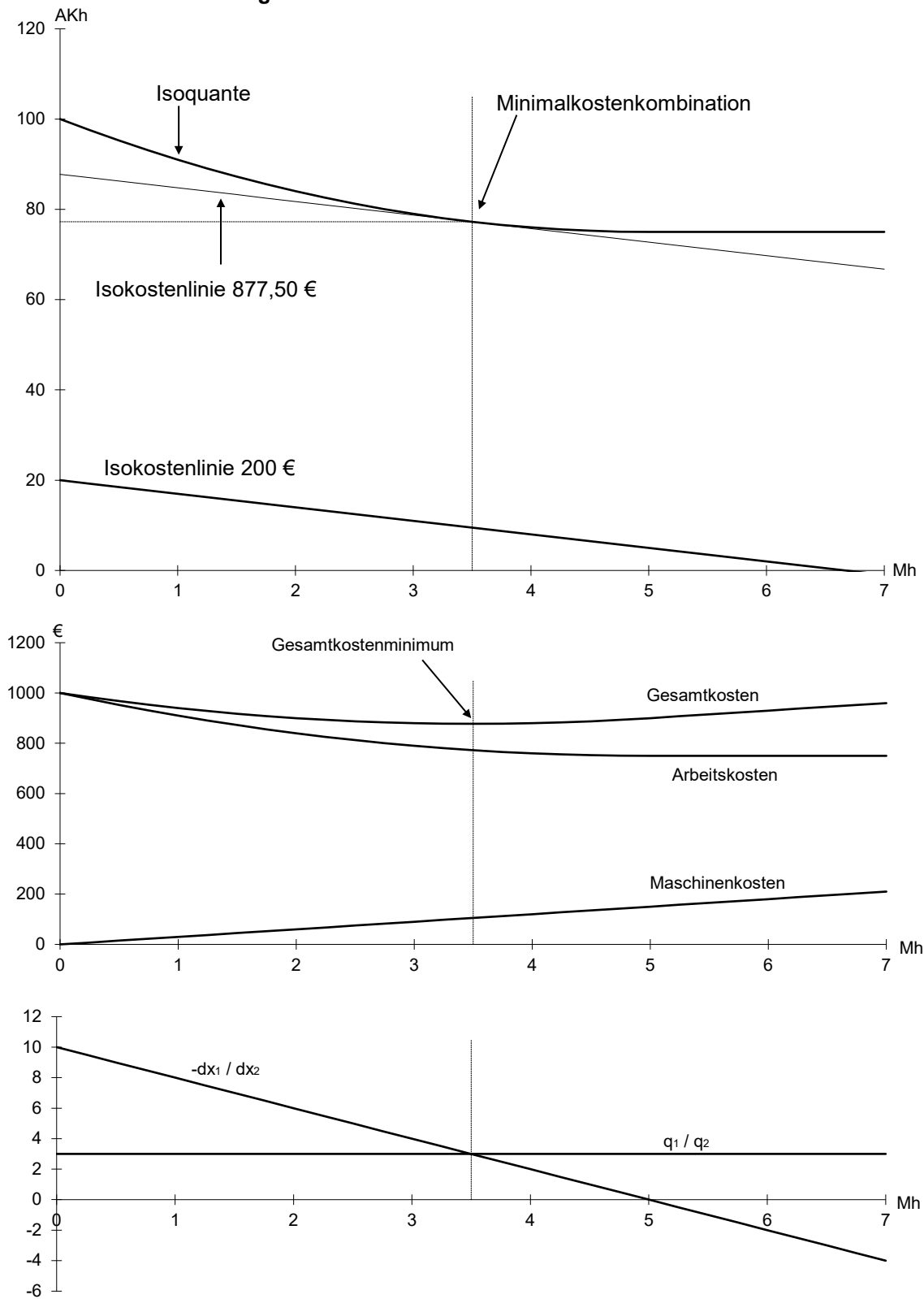
oder umgeformt, indem man x_2 als Funktion von x_1 darstellt:

$$x_2 = \frac{VK}{q_2} - \frac{q_1}{q_2} \times x_1$$

Durch jede Erhöhung der Kosten erhält man eine neue Isokostenlinie, die weiter vom Ursprung des Koordinatensystems entfernt liegt. Die niedrigsten Kosten der Arbeitserledigung je ha sind in dem Punkt erreicht, in dem die Isoquante von einer Isokostenlinie tangiert wird. Am Tangentialpunkt sind die Steigungen der Isoquante und der Isokostenlinie identisch und die Optimumbedingung ist erfüllt. Durch Fällen der Lote auf die x_1 - und x_2 -Achse von diesem Punkt erhalten wir diejenigen Mengen der beiden Faktoren, die die Arbeitserledigung mit den geringsten Kosten ermöglichen.

Im Beispiel ist dies bei einer Kombination von 3,5 Mh und 77,25 AKh erreicht. Die Gesamtkosten im Optimum betragen 877,50 €.

Übersicht 11: Ermittlung der Minimalkostenkombination substituierbarer Faktoren



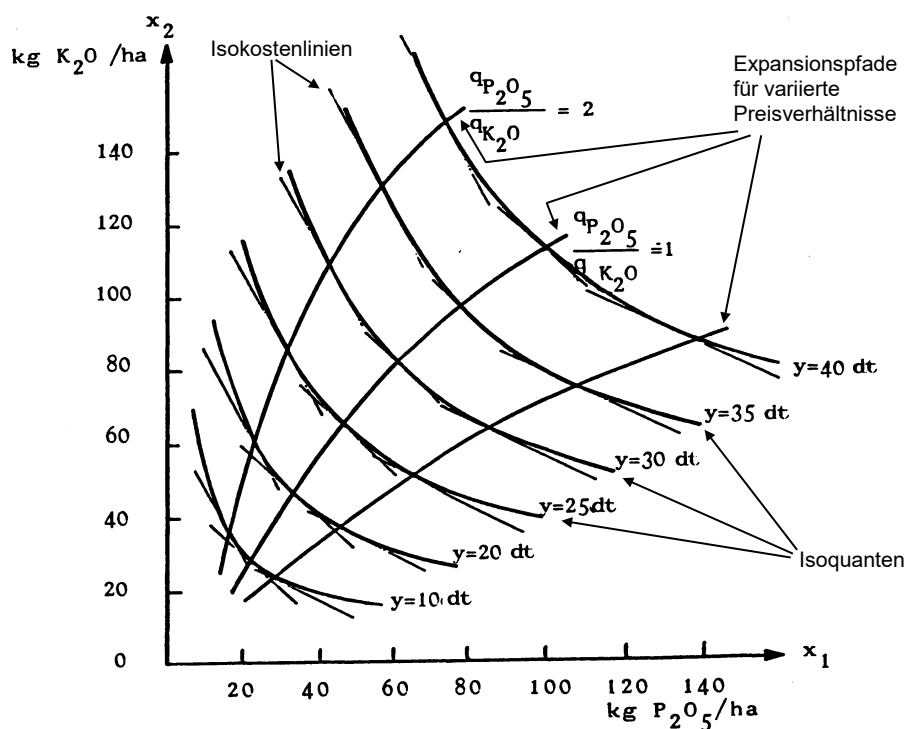
2.3 Expansionspfad

Bisher wurde bestimmt:

1. Das optimale Einsatzniveau eines variablen Faktors (X_1) und damit gleichzeitig das optimale Ertragsniveau (Optimale Faktoreinsatzmenge).
2. Die optimale Kombination zweier Produktionsfaktoren (X_1 und X_2) zur Erreichung eines bestimmten Ertrages y (optimale Aufwandszusammensetzung).

Der Einproduktbetrieb befindet sich jedoch nur dann im Optimum, d.h. erzielt nur dann den größtmöglichen Gewinn, wenn beim Einsetzen mehrerer variabler Faktoren neben der Minimalkostenkombination gleichzeitig auch die optimale Faktoreinsatzmenge gegeben ist. Auskunft darüber, in welchen Mengen die Produktionsfaktoren X_1 und X_2 kombiniert werden müssen, um unterschiedliche Produktionsmengen y mit den geringstmöglichen Kosten zu erstellen, gibt der so genannte Expansionspfad.

Übersicht 12: Expansionspfad



Es stellt sich die Frage, wo die optimale spezielle Intensität auf dem Expansionspfad erreicht ist. Die optimale Einsatzmenge nur eines variablen Faktors war dann gegeben, wenn der Grenzerlös je Faktoreinheit dem Faktorpreis gleich war. Dieser Grundsatz gilt prinzipiell auch beim Einsatz mehrerer variabler Faktoren. Die optimale Einsatzmenge der variablen Faktoren ist dann erreicht, wenn die Grenzkosten des Einsatzes der Faktorkombination entlang der Minimalkostenkombination (Expansionspfad) gleich der daraus resultierenden Grenzleistung sind.

Aus der Gleichgewichtsbedingung ist folgendes zu entnehmen:

Solange der monetäre Grenzertrag irgendeines variablen Faktors dessen Faktorpreis überschreitet, ist es wirtschaftlich seinen Einsatz auszudehnen.

oder:

Solange der monetäre Grenzertrag irgendeines variablen Faktors geringer ist als sein Faktorpreis, ist die optimale Faktoreinsatzmenge überschritten und es ist wirtschaftlich seinen Einsatz einzuschränken.

3 Verbundene Produktion (Mehrproduktbetrieb)

Bisher wurde bei sämtlichen Überlegungen von der Annahme ausgegangen, dass nur ein einziges Produkt hergestellt wird. Der landwirtschaftliche Betrieb ist jedoch in der Regel ein Mehrproduktbetrieb. Es stellt sich deshalb, außer den bis jetzt behandelten Problemen (optimale Einsatzmenge, optimale Aufwandszusammensetzung) für den Landwirt die Frage, wie die einzelnen pflanzlichen und tierischen Produktionszweige miteinander kombiniert werden sollen, um mit dem zur Verfügung stehenden Produktionsmittelapparat den größtmöglichen Gewinn zu erzielen. Gesucht wird also die optimale Produktionsrichtung. Untersucht werden die Beziehungen, die zwischen den Produkten bestehen (Produkt-Produkt-Beziehung).

In einem Mehrproduktbetrieb sind folgende unterschiedlichen Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Produkten denkbar:

3.1 Parallele (unverbundene) Produktion

Die Veränderung des Umfangs eines Produktionszweiges hat keinen Einfluss auf den Produktionsumfang eines anderen Produktionszweiges. Dieser Fall ist im landwirtschaftlichen Betrieb kaum anzutreffen. Vielmehr liegen oft Alternativ- oder Koppelproduktionen vor. Bei der Alternativproduktion ist mit der Ausdehnung eines Produktes gleichzeitig die Einschränkung eines anderen verbunden. Bei der Koppelproduktion ist mit der Erzeugung eines Produktes, z.B. von Milch, unzertrennbar ein weiteres Produkt, nämlich ein Kalb verbunden.

3.2 Konkurrierende (Alternativ-) Produktion

Hierbei bestehen zwischen den einzelnen Produktionszweigen Konkurrenzbeziehungen im Hinblick auf die nur begrenzt verfügbaren Produktionsmittel.

Die Ausdehnung eines Produktionsverfahrens ist nur möglich, wenn durch die Einschränkung eines anderen Verfahrens knappe Produktionsfaktoren freigesetzt werden. Folgende Substitutionsbeziehungen können zwischen zwei Produkten bestehen:

3.2.1 Konstante Grenzrate der Substitution

Zwischen den Produkten liegen lineare Substitutionsbeziehungen vor, d.h. bei Ausdehnung der Produktion des Produktes Y1 um einen bestimmten Betrag, muss die Produktion des Produktes Y2 um konstante Raten eingeschränkt werden.

Beispiel:

Ein Betrieb hat die Möglichkeit Bullen oder Kühe zu halten. Die Viehhaltung wird nur begrenzt durch die knappe Arbeitskapazität in Höhe von 2400 AKh/Jahr. Ein Bulle hat einen Arbeitsanspruch von 20 AKh je Jahr, eine Kuh benötigt 100 AKh je Jahr.

Es können maximal 24 Kühe oder 120 Bullen gehalten werden oder jede Kombination von Bullen und Kühen, die 2400 AKh oder weniger beansprucht. Die Grenzrate der Substitution von Bullen (y_2) durch Kühe (y_1) errechnet sich demnach aus:

$$GRS = -\frac{\Delta y_2}{\Delta y_1} = -\frac{-5}{1} = 5$$

Wenn die Kuhhaltung um eine Einheit ausgedehnt werden soll, muss die Bullenhaltung um 5 Einheiten eingeschränkt werden. Wenn ein zusätzlicher Bulle mehr gemästet werden soll, muss die Kuhhaltung um 0,2 Einheiten eingeschränkt werden.

Lineare Substitutionsbeziehungen zwischen Produkten sind jedoch im landwirtschaftlichen Betrieb recht selten. Wesentlich häufiger anzutreffen sind zunehmenden Grenzzraten der Substitution.

3.2.2 Zunehmende Grenzzraten der Substitution

Bei zunehmender Ausdehnung der Produktion des Produktes Y₁ um einen bestimmten Betrag muss die Produktion des Produktes Y₂ um immer größere Mengen eingeschränkt werden.

Beispiel:

Auf 10 ha Ackerfläche werden Weizen und Raps angebaut. Räumt man einem Produktionsverfahren im Rahmen der Fruchtfolge einen steigenden Anteil an der Ackerfläche ein, so gehen die Durchschnittserträge je ha dieser Frucht laufend zurück, während die Durchschnittserträge der anderen Frucht laufend ansteigen. Die Grenzrate der Substitution nimmt zu, d.h. bei zunehmendem Ersatz des Weizenanbaus durch Rapsanbau ist die Rapserzeugung mit dem Verzicht auf eine immer größer werdende Weizenmenge verbunden und umgekehrt.

3.2.3 Abnehmende Grenzrate der Substitution

Die Produktion von y₂ muss um immer kleiner werdende Mengen eingeschränkt werden, je mehr die Produktion von y₁ ausgedehnt wird. Dieser Fall tritt im Zusammenhang mit "economies of scale" z.B. bei der Ausdehnung der Mastschweinehaltung zu Lasten der Zuchtsauenhaltung auf.

3.3 Koppelproduktion

Von Koppelproduktion wird immer dann gesprochen, wenn bei der Herstellung eines Produktes gleichzeitig zwangsläufig andere Produkte mit anfallen. Dieser Fall ist im landwirtschaftlichen Betrieb häufig anzutreffen. Bei der Milchproduktion fallen gleichzeitig folgende Produkte mit an: Rindfleisch, Kälber und Mist. Bei der Produktion von Zuckerrüben wird gleichzeitig Zuckerrübenblatt mit hergestellt, bei der Körnerproduktion fällt gleichzeitig Stroh an. Für den Landwirt entsteht hierbei nicht die Frage, ob er das eine oder andere Produkt herstellen soll. Er kann die Koppelprodukte nur zusammen in einem bestimmten, kaum variierbaren Mengenverhältnis herstellen.

3.4 Ermittlung der optimalen Produktionsrichtung

Die optimale Produktionsrichtung ist erreicht, wenn die in einem Betrieb möglichen Produktionsverfahren im Rahmen der vorhandenen Produktionsfaktoren so kombiniert werden, dass der maximale Gesamtdeckungsbeitrag und damit der maximale Gewinn erreicht wird.

Zur Bestimmung der optimalen Produktkombination finden dabei gleichen Grundlagen Anwendung, wie bei der Ermittlung der Minimalkostenkombination verschiedener Faktoren.

Die folgenden Ausführungen beschränken sich dabei auf die für die landwirtschaftliche Produktion wichtigste Form mit zunehmender Grenzrate der Substitution zwischen konkurrierenden Produkten. Anhand des bereits erwähnten Beispiels Weizen-Raps-Produktion sollen wichtige Gesetzmäßigkeiten aufgezeigt werden.

Auf 10 ha Ackerfläche werden Weizen und Raps angebaut. Räumt man einem Produktionsverfahren im Rahmen der Fruchtfolge einen steigenden Anteil an der Ackerfläche ein, so gehen die Durchschnittserträge je ha dieser Frucht laufend zurück, während die Durchschnittserträge der anderen Frucht laufend ansteigen.

Nachfolgend ist auf tabellarischem und graphischem Weg die Ermittlung der optimalen Produktionsrichtung (=Aufteilung der verfügbaren Fläche auf Raps und Weizen) dargestellt.

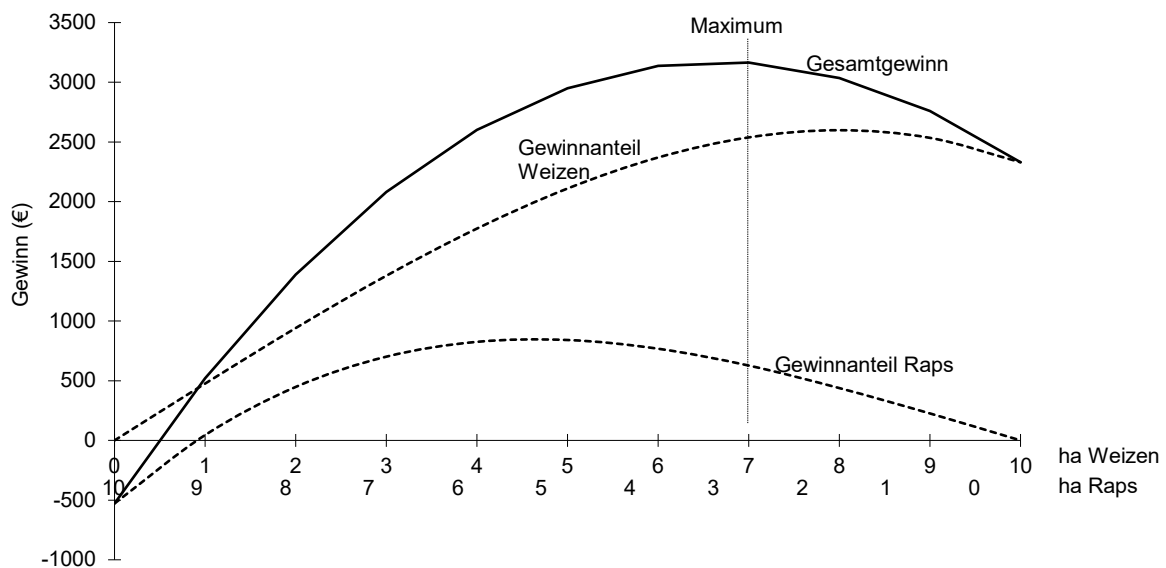
Folgende Daten sind zugrunde gelegt:

Preise:	Weizen	18 €/dt
	Raps	34 €/dt
Kosten:	Weizen	1000 €/ha (um Flächenprämie gekürzt)
	Raps	1100 €/ha (um Flächenprämie gekürzt)

a) Tabellarische Ermittlung der optimalen Produktionsrichtung

Ant. Weizen %	Ertrag Weizen dt/ha	Ant. Raps %	Ertrag Raps dt/ha	Altern. Nutzung Weizen ha	Raps ha	Altern. Erträge Weizen dt	Raps dt	Grenzrate der Substitution	Gesamt-wert	Gesamt-kosten €/10ha	Gesamt-Gewinn
0	--	100	30,8	0	10	0	308		10472	11000	-528
10	82,0	90	32,5	1	9	82	293	$-(-15,5 : 82) = 0,19$	11421	10900	521
20	81,7	80	34,0	2	8	163	272	$-(-20,5 : 81,4) = 0,25$	12189	10800	1389
30	81,1	70	35,3	3	7	243	247	$-(-24,9 : 79,9) = 0,31$	12781	10700	2081
40	80,2	60	36,4	4	6	321	218	$-(-28,7 : 77,5) = 0,37$	13200	10600	2600
50	79,0	50	37,3	5	5	395	187	$-(-31,9 : 74,2) = 0,43$	13451	10500	2951
60	77,5	40	38,0	6	4	465	152	$-(-34,5 : 70) = 0,49$	13538	10400	3138
70	75,7	30	38,5	7	3	530	116	$-(-36,5 : 64,9) = 0,56$	13465	10300	3165
80	73,6	20	38,8	8	2	589	78	$-(-37,9 : 58,9) = 0,64$	13237	10200	3037
90	71,2	10	39,0	9	1	641	39	$-(-38,6 : 52,000) = 0,74$	12860	10100	2760
100	68,5	0	---	10	0	685	0	$-(-39 : 44,19) = 0,88$	12330	10000	2330

b) Geometrische Ermittlung der optimalen Produktionsrichtung



4 Optimale Betriebsorganisation

Die optimale Betriebsorganisation ist gegeben, wenn alle 3 Planungsebenen

- Faktor-Produkt-Beziehung (optimale Einsatzmenge)
- Faktor-Faktor-Beziehung (optimale Aufwandszusammensetzung)
- Produkt-Produkt-Beziehung (optimale Produktionsrichtung)

gleichzeitig im Optimum sind.

Wegen der bestehenden Zusammenhänge zwischen den drei genannten Planungsebenen ist es an sich erforderlich, dass alle drei Planungsebenen simultan optimiert werden. Da dies nur mit komplizierten Planungsverfahren möglich ist, wird in der Praxis die Planung in der Regel in zwei Planungsschritte unterteilt:

1. Auswahl und Festlegung der bei der Planung zu berücksichtigenden Produktionsverfahren (Deckungsbeitragsrechnung)
2. Kombination der Produktionsverfahren mit dem Ziel, den Gesamtdeckungsbeitrag zu maximieren (Optimale Produktionsrichtung).

An die Stelle (simultaner) Optimierung der drei Planungsebenen tritt jetzt die Forderung nach der zweckmäßigen Auswahl und Formulierung der Produktionsverfahren einerseits und deren optimale Kombination andererseits.

Bei der Festlegung des variablen Produktionsmitteleinsatzes, sowohl bei den Produktionsverfahren (Düngemittel, Futtermittel, Pflanzenschutz) als auch auf Betriebsebene (Arbeitskräfte, Maschinen, Boden), sind die Gesetzmäßigkeiten der Ermittlung der optimalen Einsatzmenge und der Minimal-kostenkombination zu beachten soweit es die Vereinfachung zulässt.

Die quantitative Umsetzung der Produktionstheorie in der Praxis erfordert eine Vielzahl zuverlässiger, standortspezifischer Daten, die häufig nicht verfügbar sind. Die Produktionstheorie kann deshalb oft nur als Denkmodell dienen, das je nach Datenlage und Rechenkapazität partiell quantitativ eingesetzt werden kann. Dennoch ist diese ein sehr wertvolles Hilfsmittel, die Probleme in der Praxis zu lösen.

Die Betrachtung der Grenzwerte ist gerade in der Praxis von so großer Bedeutung, weil die vollständigen funktionalen Zusammenhänge zwischen Faktoren und Produkten i.d.R. nicht bekannt sind. Vielmehr geht es in der praktischen Planung meist darum, ausgehend von einer bestehenden Situationen, zu bestimmen, ob eine bestimmte Änderung der Betriebsorganisation ökonomisch sinnvoll ist. Bekannt sind also meistens die Änderungen des Input und Output. Gemäß den behandelten Grundsätzen der Grenzwertrechnung reicht die Kenntnis dieser Differenzgrößen jedoch vollständig aus, um die relevanten Entscheidungen im Sinne der Betriebsoptimierung zu treffen.

Übersicht 13: Planungsebenen im landwirtschaftlichen Betrieb

