

Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 01: *Anitya* – Alles ändert sich!

Zu diesem Kapitel steht auch ein Julia-Workshop zur Verfügung: [0101Anitya.nl](https://www.0101Anitya.nl)

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du ...

- *Thresholds* (also *Schwellenkonzepte*) beschreiben.
- Die *Thresholds Proportionalität* und *Substitution* bei Wärme und Tempo anwenden.
- Algebraische Manipulationen bilden und anwenden.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

Ganz, ganz wichtig! In diesem ganzen Kurs beschäftigen wir uns damit, wie die Dinge sich ändern. Alles im Universum befindet sich im ständigen Wandel, und in der Biologie wollen wir verstehen, wie sich Veränderungen vollziehen. Auch **Du** bist ein biologischer Organismus, und durch die Teilnahme an diesem Kurs wirst Du Dich ändern! Deswegen ist es wichtig, dass Du weißt, wie Du diese Änderungen möglichst effektiv durchführen kannst!

Lernen besteht aus **Dekonstruieren** dessen, was wir bis jetzt wussten, und **Konstruieren** des neuen Wissens. Um lernen zu können, brauchen wir also zwei Voraussetzungen:

- *Konstruieren* funktioniert gar nicht ohne vorherige Dekonstruktion – besonders bei sogenannten **Schwellenkonzepten (Thresholds** – siehe unten).
- *Dekonstruieren* funktioniert gar nicht ohne, dass Du Dir die Hände schmutzig machst: Du musst erstmal entdecken, was Du am bisherigen Wissen ändern musst.

Du musst also üben, und dazu gibt es zwei Möglichkeiten: Du machst Übungen *vor* der Klasse und ich helfe Dir nachher in der Klasse; *oder* ich sage Dir in der Klasse, was Du bis jetzt alles falsch verstehst und dann musst Du *nach* der Klasse hoffen, dass Du zurechtkommst ...

Glaube mir bitte: Üben vorher ist viieeel einfacher! Daher ...

Bearbeite diesen Dekonstruktions-Abschnitt immer (!!!) vor jedem unserer Treffen zusammen mit anderen Partner:innen.

Die wichtigen Thresholds werden wir dann *während* des Unterrichts konstruieren.

Threshold 0: Schwellenkonzepte

- Ein **Threshold** ist eine Idee, die so wichtig und grundlegend ist, dass Du sie unbedingt lernen musst, bevor Du alles andere in einem Fachgebiet verstehen kannst.
- Die *nicht-so-tolle Nachricht* ist, dass Thresholds normalerweise so erstaunliche Konsequenzen haben, dass sie unserem eigenen Glaubenssystem widersprechen. Das macht sie ziemlich schwierig zu lernen, daher müssen wir sie *sehr sorgfältig* lernen.
- Die *ganz tolle Nachricht* ist, dass sobald Du ein Threshold gründlich gelernt hast, erscheint die ganze Welt so viel anders und einfacher!
- In diesem Modul lernen wir insgesamt acht Thresholds: **Proportionalität, Substitution, Grenzwerte, Algorithmen, Komposition, Akkumulation, Abstraktion** und **Puzzeln**.

Fangen wir also an ...

Threshold 1: Proportionalität

Wir sagen, dass eine Variable y **proportional** zur zweiten Variable x ist, falls diese beiden Variablen durch die folgende Gleichung verbunden sind:

$$y = k \cdot x$$

(wobei k eine Konstante ist). k ist die **spezifische Ratenkonstante** der Proportionalität.

1. Ich backe 6 Donuts für mich und 2 Freunde. Wie viele Personen (p) gibt es? Was ist der Wert von d (die Anzahl der Donuts)? Welchen Wert hat die spezifische Donut-Konstante $k = d/p$? Schreiben Sie eine allgemeine Gleichung auf, mit der ich d berechnen kann, wenn mir jemand die Werte von k und p sagt.
2. Auf Partys verwende ich immer den gleichen Wert der spezifischen Donut-Konstante k . Wie viele Donuts muss ich backen, wenn wir 5 Personen sind? Wie viele Leute können Donuts essen, wenn ich 12 Donuts backe?
3. Meine Frau verwendet eine andere spezifische Donut-Konstante: Sie backt 8 Donuts für 6 Personen. Wie groß ist ihr Wert von k als gewöhnlicher Bruch ($\frac{a}{b}$)? Kannst Du diesen Bruch einfacher schreiben?
4. Falls 3-mal so viele Leute wie in (3) kommen, wie viele Donuts backt meine Frau?
5. Falls sie 5-mal so viele Donuts wie in (3) kocht, wie viele Personen können dann essen?

Threshold 2: Substitution

Mathematik berechnet Ergebnisse allein durch **Substitutions**-Operationen! Falls ich im Ausdruck $\cos(x)$ die Substitution $x \equiv 60^\circ$ einsetze, liefert dies das Ergebnis $\cos(60^\circ)$, was wir wiederum durch den numerischen Ausdruck 0.5 ersetzen können, also berechnen wir:

$$\cos(x) \equiv \cos(60^\circ) \equiv 0.5$$

6. Wie habe ich MS Word verwendet, um den ersten dieser Sätze in den zweiten umzuwandeln:

In der Wissenschaft übersetzen wir die Dynamik eines physikalischen Prozesses in mathematische Form, verwenden Regeln, um diese Form zum Ergebnis umzuwandeln, und beobachten dann den Prozess, um die Belege dafür zu finden, dass unser Ergebnis korrekt ist.

In der Wissenschaft übersetzen wir die sexy Dynamik eines physikalischen Prozesses in mathematische Form, verwenden Regeln, um diese Form zum Ergebnis umzuwandeln, und beobachten dann den Prozess, um die sexy Belege dafür zu finden, dass unser Ergebnis korrekt ist.

7. Wie habe ich sichergestellt, dass Word nicht den Text „diesexye Form“ erzeugt?
8. Welche dieser Substitutionen sind *ungültig*? Beweise dies mit einem Gegenbeispiel:

$$5(a + b) \equiv 5a + 5b$$

$$5(a \times b) \equiv 5a \times 5b$$

$$(a + b)^5 \equiv a^5 + b^5$$

$$(a b)^5 \equiv a^5 b^5$$

$$\sin a + b \equiv \sin(a) + \sin(b)$$

$$\sin(a + b) \equiv \sin(a) + \sin(b)$$

$$\sin a + b \equiv \sin(a) + b$$

$$(a/b)^5 \equiv a^5/b^5$$

9. Ein **Mexclop** ist eine besondere Art von Zahl, die in der Quantentheorie wichtig ist. Wir schreiben einen Mexclop als zwei gewöhnliche Zahlen in geschweiften Klammern wie folgt: $\{2|3\}$, $\{-2|4\}$, $\{100|-2.3\}$ or $\{5|0\}$. Schreibe zwei weitere Beispiele für Mexclops auf und vergleiche sie mit einem Partner.

Teste Dich selbst ...

10. Benütze die Identität $(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$ um den Wert des Ausdrucks 5.1×4.9 ohne Taschenrechner zu berechnen.
11. Berechne $\sqrt{2}$ mit Deinem Taschenrechner. Du bekommst eine Antwort wie 1.414213562.... Quadriere 1.414213562; ist das Ergebnis gleich 2? Warum (nicht)?
12. Wie viele Nachkommastellen brauchst Du um $\sqrt{2}$ exakt auszuschreiben?
13. **Vereinfache** die Zahl $\sqrt{8}$. Mit anderen Worten: mache die Nummer unter der Wurzel möglichst einfach und klein. (Hinweis: $8 \equiv 4 \times 2$ und $4 \equiv 2^2$)
14. Was ist Konstante und was ist Variable bei diesen Gleichungen?
a) $(cx + 6)^2 = 5a + 3$; b) $y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; c) $\frac{dy}{dx} = x^3 + ax + 5$.
15. Welche dieser Gleichungen sind *Identitäten* (also für *alle* Werte von x und y gültig)?
a) $(x + b)(y - b) = xy + b(y - x) - b^2$; b) $2y + x^2 = 10$.
16. Finde die *exakte* Lösung dieser Gleichungen:
a) $x^2 - 5 = 0$; b) $(x + 2)^2 - 3 = 0$.
17. Vereinfache: a) $\sqrt{28}$; b) $\sqrt{\frac{5}{36}}$; c) $\sqrt{18}$; d) $\sqrt{\frac{9}{16}}$.

Numerical answers

- 14: [a] $c, 6, 2, 5, a, 3$; x ; b) $a, b, c, 4, 2$; y ; c) $3, a, 5$; x]
- 15: [a] Identität; b) Gleichung]
- 16: [a] $\pm\sqrt{5}$; b) $-2 \pm \sqrt{3}$]
- 17: [a] $2\sqrt{7}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{6}$; c) $3\sqrt{2}$; d) $\frac{3}{4}$]

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

Polynome sind Ausdrücke der Form $a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$

$3x^2 + 5x + 13$: Ein Polynom in der Variablen x .

$1 - 3y^2$: Ein Polynom in der Variablen y .

Ein **Ausdruck** ist die Summe mehrerer **Terme** wie z.B. $-2z^4$, $3\sin(x)$ oder -1 .

Funktion: Nimm einen Wert, tue was damit und liefere Ergebnis zurück

$f(x) \equiv x^2 + 3$: Funktion f nimmt ein **Argument** (x), quadriert es und addiert 3.

$g(x) \equiv 5 - (2x)^2$: Funktion g verdoppelt sein Argument, quadriert das Ergebnis, subtrahiert dieses von 5, und liefert das Gesamtergebnis zurück.

Du kannst beliebige Zahlen als Argumente in die Funktion einfüttern, z.B.:

$$\begin{array}{l} f(1) = (1)^2 + 3 = 4 \quad | \quad g(1) = 5 - (2 \times 1)^2 = 1 \\ f(3) = (3)^2 + 3 = 13 \quad | \quad g(3) = 5 - (2 \times 3)^2 = -31 \end{array}$$

Multiplizieren und dividieren auf dreifacher Art:

$$\begin{array}{l} (3x \times 2z) + 2x \times \cos(\beta) + x \times y \quad \frac{x+5}{2} \\ (3x \cdot 2z) + 2x \cdot \cos(\beta) + x \cdot y \quad (x+5) \div 2 \\ 6xz + 2x \cos(\beta) + xy \quad (x+5)/2 \end{array}$$

Identitäten: Die Geheimwaffe der Mathematik

Eine **Identität** ist *immer* für *alle* Werte der Variablen x, y, \dots gültig, aber eine **Gleichung** gilt nur für manche bestimmte Werte (die **Lösungen** der Gleichung):

Identität (\equiv): $x^2 - 3^2 \equiv (x + 3)(x - 3)$

Gleichung ($=$): $x^2 - 3^2 = 0$

Das tolle an Identitäten (im Gegensatz zu Gleichung) ist, dass sie uns allgemein gültige Substitutionsregeln geben: Du kannst *immer und überall* den Ausdruck $x^2 - 3^2$ durch $(x + 3)(x - 3)$ substituieren; aber Du kannst *nicht* immer $x^2 - 3^2$ durch 0 ersetzen!

Eine Surd ist eine exakte Wurzel

Die Zahlen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $3+\sqrt{5}$ heißen alle **Surden**: wir können sie alle als Wurzeln exakt hinschreiben, nicht aber als Dezimalzahlen.

Mit nur drei Identitäten bewältigst Du alle möglichen Surd-Aufgaben

Regel 1: $\sqrt{ab} \equiv \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; **Regel 2:** $\sqrt{\frac{a}{b}} \equiv \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; **Regel 3:** $a \equiv (\sqrt{a})^2 \equiv \sqrt{a} \times \sqrt{a}$

Beispiel – Vereinfache die Surd $\sqrt{8}$: $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ ■

Beispiel – Vereinfache die Surd $\sqrt{\frac{3}{16}}$: $\sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ■

Beispiel – Zeige, dass $\frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$: $\frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{3 \times 3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$ ■

Beispiel – Berechne $(2\sqrt{5} + 3\sqrt{6})^2$:

$$\begin{aligned}
(2\sqrt{3} + 3\sqrt{5})^2 &= (2\sqrt{3} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) \\
&= (2\sqrt{3})^2 + 2(2\sqrt{3})(3\sqrt{5}) + (3\sqrt{5})^2 \\
&= 2^2 \times (\sqrt{3})^2 + 2 \times 2 \times 3 \times (\sqrt{3})(\sqrt{5}) + 3^2 \times (\sqrt{5})^2 \\
&= 4 \times 3 + 12(\sqrt{3})(\sqrt{5}) + 9 \times 5 \\
&= 57 + 12\sqrt{15} \blacksquare
\end{aligned}$$

Rationalisieren entfernt Surden aus dem Nenner eines Bruchs

Beispiel – Rationalisiere den Bruch $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2+\sqrt{3}} &= \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-(\sqrt{3})^2} \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = \frac{2-\sqrt{3}}{1} = 2-\sqrt{3} \blacksquare
\end{aligned}$$

Entferne Klammern aus einem Ausdruck durch Ausmultiplizieren!

Einzelklammern: $k(a+b+c) \equiv ka+kb+kc$:

$$\begin{aligned}
2xy(x^2+5x-3) &\equiv (2xy \cdot x^2) + (2xy \cdot 5x) + (2xy \cdot (-3)) \\
&\equiv 2x^3y + 10x^2y - 6xy
\end{aligned}$$

Doppelklammern: $(a+b)(m+n) \equiv am+an+bm+bn$:

$$(x+3)(y-2) \equiv xy - 2x + 3y - 6$$

Quadratklammern: $(a+b)^2 \equiv (a+b)(a+b) \equiv a^2+2ab+b^2$:

$$(2x-3y)^2 \equiv (2x)^2 + 2(2x)(-3y) + (-3y)^2 \equiv 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

DOTS: $(a+b)(a-b) \equiv a^2-ab+ab-b^2 \equiv a^2-b^2$:

$$(x+2\sqrt{y})(x-2\sqrt{y}) \equiv x^2 - (2\sqrt{y})^2 \equiv x^2 - 4y$$

Vereinfache Ausdrücke durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren

Was sind die gemeinsamen Faktoren: $3ax^3 + 6ax^2y - 12ax^2y^2$?

Alle Terme haben einen gemeinsamen Faktor 3, auch a und auch x^2 , also ist der gesamte gemeinsame Faktor $3ax^2$ und diesen klammern wir aus:

$$3ax^3 + 6ax^2y - 12ax^2y^2 \equiv 3ax^2(x + 2y - 4y^2)$$

Gemeinsamene Faktoren stehen manchmal in Klammern

Beispiel – Vereinfache diesen Ausdruck: $(x-1)(x+2) + (x+2)^2 - x(x+2)$

Ein gemeinsamer Faktor in jedem Term ist $(x+2)$, also:

$$\begin{aligned}
(x-1)(x+2) + (x+2)^2 - x(x+2) &\equiv (x+2)((x-1) + (x+2) - x) \\
&\equiv (x+2)(x-1+x+2-x) \\
&\equiv (x+2)(x+1) \blacksquare
\end{aligned}$$

Wir können Brüche mit einem gemeinsamen Nenner einfach addieren

$$\frac{a}{y} + \frac{b}{y} + \frac{c}{y} \equiv \frac{(a + b + c)}{y}$$

Wenn wir Brüche addieren wollen, müssen wir sie also so schreiben, dass alle, die addiert werden sollen, einen gemeinsamen Nenner haben:

Beispiel – Addiere diese Brüche: $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} - \frac{1}{4x}$.

Wir müssen die Brüche so schreiben, dass alle drei Nenner sich gleich sind:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} - \frac{1}{4x} &\equiv \frac{6}{12x} + \frac{4}{12x} - \frac{3}{12x} \\ &\equiv \frac{6 + 4 - 3}{12x} \equiv \frac{7}{12x} \blacksquare \end{aligned}$$

(Grausig ausschauendes) Beispiel – Vereinfache diesen Ausdruck: $\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+5}$.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+5} &\equiv \frac{2(x+5)}{(x-2)(x+5)} + \frac{3(x-2)}{(x-2)(x+5)} \\ &\equiv \frac{2(x+5) + 3(x-2)}{(x-2)(x+5)} \\ &\equiv \frac{2x + 10 + 3x - 6}{(x-2)(x+5)} \equiv \frac{5x + 4}{(x-2)(x+5)} \blacksquare \end{aligned}$$

Vereinfache Brüche durch Kürzen

Beispiel – Vereinfache diesen Bruch: $\frac{ax+ay}{az}$.

Zwei Möglichkeiten:

Entweder: $\frac{ax+ay}{az} \equiv \frac{a(x+y)}{az} \equiv \frac{x+y}{z}$; oder: $\frac{ax+ay}{az} \equiv \frac{ax}{az} + \frac{ay}{az} \equiv \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \equiv \frac{x+y}{z}$. ■

Vereinfache schwierige Klammerausdrücke

Beispiel – Vereinfache diesen Ausdruck: $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

$$\begin{aligned} (x - y)(x^2 + xy + y^2) &\equiv x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 + xy + y^2) \\ &\equiv x^3 + x^2y + xy^2 - yx^2 - xy^2 - y^3 \\ &\equiv x^3 - y^3 \blacksquare \end{aligned}$$

Manchmal muss man einfach irgendetwas ausprobieren ...

Beispiel – Vereinfache: $4x + \frac{4x}{x+1} - 4(x+1)$.

$$\begin{aligned} 4x + \frac{4x}{x+1} - 4(x+1) &\equiv \frac{4x \times (x+1)}{x+1} + \frac{4x}{x+1} - \frac{4(x+1) \times (x+1)}{x+1} \\ &\equiv \frac{4x^2 + 4x + 4x - 4x^2 - 4x - 8x - 4}{x+1} \\ &\equiv -\frac{4}{x+1} \blacksquare \end{aligned}$$

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt gemeinsam!

Proportionalität

18. **Grabinschrift des Diophantos von Alexandria (ca. 290 CE):** *Knabe zu sein gewährte Gott ihm ein Sechstel des Lebens. Noch ein Zwölftel dazu sprosst' auf der Wange der Bart. Dazu ein Siebentel noch, da schloss er das Bündnis der Ehe; nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn. Wehe, das Kind das geliebte, gerade noch die Hälfte der Jahre hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag. Darauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer von sich scheuchend auch er kam an das irdische Ziel.*

Wie alt wurde Diophantos von Alexandria? Hinweis: Sei x das Symbol für Diophantos' Lebensdauer, jetzt übersetze seine Grabinschrift in eine Gleichung.

19. The *specific latent heat constant* (h) tells me how much heat energy (Q) I need to convert a mass m of ice into water: $Q = h m$. Write down a phrase describing this relationship: “_ is proportional to _ with specific constant _”.
20. The specific latent heat of ice is $h = 334 \times 10^3$ J/kg (= 334 kilo-Joules per kilogram of ice). How many kJ of heat would I need to melt 3 kilograms of ice?
21. How many kJ would I need to melt 3 times as much ice (i.e., 9 kg)?
22. How many kJ would I need to melt 100 grams (i.e., one tenth of a kilogram) of ice? Do not use a calculator!
23. The *specific rate constant* (v) of my car tells me how far (Δs) my car will drive in a given time interval Δt : $\Delta s = v \Delta t$. (Note: the symbol Δ is the Greek letter “delta”; the symbols Δs , or “delta-s”, mean: “A small change in the distance s ”) Write down a phrase describing this relationship.
24. What is a more common name for v ?
25. The distance from town A to town B is $\Delta s = 20$ km. It takes you $\Delta t = 0.5$ h to drive in your car at constant speed from A to B. What is your constant speed?
26. How long would it take you to drive from A to C, which is 3 times as far away?
27. What would be an *even better* name for v ? If you are uncertain, make sure you answer the next question, and then return afterwards to here ...
28. You drive your car from town A to town D at a constant speed 40 km/h. When you arrive in town D, you *immediately* drive back to town A, but at the higher constant speed 60 km/h. What is your average speed for the complete trip?

Substitution

29. Write down a mexclop that is different from any mexclop anyone else might choose.
30. We can multiply together two mexclops to calculate their product like this:

$$\{a|b\} \times \{c|d\} \equiv \{ac - bd|bc + ad\}$$

The symbol \equiv means this is an **identity**: it is a substitution that is true for *all* numerical values of a , b , c and d . That is, we can *always* substitute $\{a|b\} \times \{c|d\}$ by $\{ac - bd|bc + ad\}$, or substitute $\{ac - bd|bc + ad\}$ by $\{a|b\} \times \{c|d\}$. For example:

$$\{2|3\} \times \{4|5\} = \{8 - 15|12 + 10\} = \{-7|22\}$$

What is the value of $\{1|2\} \times \{3|4\}$? Get together with two partners and calculate pairwise products of your three mexclops, then check their correctness.

31. Write down two mexclops whose product is $\{25|0\}$. Find another two.

32. We call $\{1|0\}$ the *identity* mexclop. What is the value of $\{1|0\} \times \{3|4\}$? What is the value of $\{1|0\} \times \{a|b\}$?
33. Write down two mexclops whose product is $\{1|0\}$. Find another two.
34. Write down a mexclop u , whose square $u^2 \equiv (u \times u)$ is $\{-1|0\}$. Find another mexclop with this property.
35. The product of two mexclops u and v is *commutative* iff $u \times v \equiv v \times u$. Find two mexclops whose product is commutative. Find another two. What does "iff" mean?
36. Can you check whether the product of *any* two mexclops is *always* commutative?
37. Is multiplying mexclops *associative*: is it *always* true that $(u \times v) \times w \equiv u \times (v \times w)$?

Algebraische Manipulation

38. Zeige, dass a) $\frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
39. Berechne $(6\sqrt{3} + 2\sqrt{7})^2$ als vereinfachte Surd, und schätze dann deren Wert. Vergleiche Deine Antwort mit der eines Taschenrechners.
40. Rationalisiere den Bruch $\frac{2}{3+\sqrt{7}}$.
41. Eliminiere die Klammern und vereinfache diese Ausdrücke:
a) $(a + b)(a - b)$; b) $35xy + 25y(5y + 7x) - 100y^2$.
42. Klammere die gemeinsamen Faktoren dieser Ausdrücke aus:
a) $2x^2y + axy + 2xy^2$; b) $16y + 8yx + 56x$; c) $x(x - 2) + 3(2 - x)$.
43. Stelle diese Brüche über einen kleinsten gemeinsamen Nenner:
a) $\frac{2x}{3} + \frac{y}{12} + \frac{x}{5}$; b) $\frac{5}{xy^2} - \frac{2}{x^2y}$; c) $\frac{1}{x} + \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}$.
44. Vereinfache diese Ausdrücke: a) $\frac{2a}{b} - \frac{a}{2b}$; b) $\frac{2p}{p+q} + \frac{2q}{p-q}$.
45. Kreiere Deine eigene Prüfungsaufgabe! Überlege Dir zwei lineare Klammerausdrücke in x wie z.B. $(2x + 3)$ und $(x - 5)$. Benütze diese als Nenner zweier Brüche, wähle dazu zwei Zähler (beispielsweise 1 und 4) und addiere diese Brüche zusammen: $\frac{1}{2x+3} + \frac{4}{x-5}$. Vereinfache diese Summe und vergleiche Dein Ergebnis mit dem von Freunden.
46. Vereinfache: a) $(5\sqrt{3})^2$; b) $(5 + \sqrt{6})(2 - \sqrt{6})$; c) $\frac{5+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$.
47. Schreibe $\sqrt{18} - 2\sqrt{8} + \frac{4}{\sqrt{2}}$ in die Form $n\sqrt{2}$ um, wobei $n \in \mathbb{Z}$.
48. Zeige, dass $\frac{4\sqrt{32}}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{3} + \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{20}} + \sqrt{12}$ ein Integer ist.

Numerische Ergebnisse

18: [84 yr]

38: [a] $\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

39: [136 + 24 $\sqrt{21}$]

40: [3 - $\sqrt{7}$]

41: [a] $a^2 - b^2$; b) $25y^2 + 210xy$

42: [a] $xy(2x + a + 2y)$; b) $8(2y + xy + 7x)$; c) $(x - 2)(x - 3)$

43: [a] $\frac{52x+5y}{60}$; b) $\frac{5x-2y}{x^2y^2}$; c) $\frac{x^3+x^2-y^2+xy^2}{x(x^2-y^2)}$

44: [a] $\frac{3a}{2b}$; b) $\frac{2(p^2+q^2)}{p^2-q^2}$

46: $[75; 4 - 3\sqrt{6}; 5 + 2\sqrt{5}]$

47: $[\sqrt{2}]$

48: $[18]$

Konstruktionsübung: Prüfungsvorbereitung!

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Schreibe $\sqrt{8} - 2\sqrt{32} + \frac{6}{\sqrt{2}}$ in die Form $n\sqrt{2}$ um, wobei $n \in \mathbb{Z}$.

Musterlösung:

Folgen

Die Form dieses Ausdrucks ist eine Summe von drei Termen, die alle irgendwie die Surd $\sqrt{2}$ enthalten.

Engagieren

Wir können die Zahlen unter den Wurzeln als eine Multiplikation zweier Zahlen dargestellt werden (Bsp.: $\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 9}$). Dann schauen wir, ob unser Ergebnis die erwünschte Form $n\sqrt{2}$ hat. Da es schwierig ist mit einer Wurzel im Nenner zu rechnen (zumindest im Kopf), streben wir eine ganze Zahl (Integer) als Nenner im dritten Term an.

Abstrahieren

1. Benütze die Wurzel-Regeln um die Surd-Terme zu vereinfachen.
2. Führe die Addition durch und bringe das Ergebnis in die gesuchte Form.

Anwenden

$$\begin{aligned}\sqrt{8} - 2\sqrt{32} + \frac{6}{\sqrt{2}} &= \sqrt{4 \times 2} - 2\sqrt{16 \times 2} + \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \\ &= \sqrt{4} \times \sqrt{2} - 2\sqrt{16} \times \sqrt{2} + \frac{6\sqrt{2}}{2} \\ &= 2\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \\ &= \underline{\underline{-3\sqrt{2}}}\end{aligned}$$

Ergebnis folgen

Der Betrag des zweiten Terms ist um einiges größer als der Betrag des ersten und dritten Terms. Da dieser Term zudem ein negatives Vorzeichen hat, würden wir ein negatives Ergebnis erwarten. Zudem gilt $-3 \in \mathbb{Z}$. Unser Ergebnis scheint also plausibel.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Zeige, dass $\frac{4\sqrt{8}}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{3} + \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{45}} + \sqrt{27}$ ein Integer ist.