

Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 02: Was ist Mathematik?

Zu diesem Kapitel steht auch ein Julia-Workshop zur Verfügung: [0102AlgorithmsLimits.jl](#)

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du ...

- Algorithmen und Grenzwerte anwenden, um Veränderungsraten und schwierige Werte herzuleiten.
- Lösungsmethoden für quadratische Gleichungen formulieren und einsetzen.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

- **Mathematik** ist die Wissenschaft von Struktur.
- **Algorithmen** sind die Berechnungen, die die Mathematik verwendet.
- **Grenzwerte** sind ein Werkzeug zum Approximieren von Werten, die wir nicht genau berechnen können.

Threshold 3: Algorithmen

Ein **Algorithmus** ist ein mathematisches Rezept – eine Folge von Substitutionen, die von einer Familie von Aussagen (sogenannten **Axiomen**), die wir für wahr halten, zu einer neuen Aussage (dem Ergebnis) führt, von der wir dann feststellen, dass sie wahr sein muss. Es gibt zwei Arten von Algorithmen – *Berechnungen* und *Argumenten* (auch *Beweise* genannt):

Eine **Berechnung** ersetzt die *Zahlen* in den Axiomen, um einen resultierenden Wert zu berechnen. Hier ist zum Beispiel eine Berechnung:

$$\begin{aligned}y &= \cos(50^\circ + 10^\circ) \\ \Rightarrow y &= \cos(60^\circ) \\ \Rightarrow y &= 0.5\end{aligned}$$

Ein **Argument** ersetzt bestimmte *Aussagen* in den Axiomen, um einen resultierenden Satz zu beweisen. Hier ist ein Argument ...

[Dolores Umbridge gave a silvery laugh: ...] "I must have misunderstood you, Professor Dumbledore. [...] So silly of me, but it sounded for a teensy moment as though you were suggesting that the Ministry of Magic had ordered an attack on this boy!" [...]

"If it is true that the Dementors are taking orders only from the Ministry of Magic, and it is also true that two Dementors attacked Harry and his cousin a week ago, then it follows logically that somebody at the Ministry might have ordered the attacks," said Dumbledore politely.

1. Ist Dumbledores Argument logisch gültig? Die Schritte seines Arguments sind:
 - **Axiom:** If Dementors do X , then the Ministry ordered them to do X .
 - So if Dementors attack Harry, then the Ministry ordered them to attack Harry.
 - **Axiom:** Dementors attacked Harry.
 - **Theorem:** Therefore, the Ministry ordered the Dementors to attack Harry.

Ist dieses Argument gültig?

2. Doch vielleicht habe ich Dumbledores Argument missverstanden! Vielleicht wollte er folgendes sagen:
 - **Axiom:** If the Ministry orders Dementors to do X , then they do X .
 - So if the Ministry orders Dementors to attack Harry, then they attack Harry.
 - **Axiom:** Dementors attacked Harry.
 - **Theorem:** Therefore, the Ministry ordered the Dementors to attack Harry.

Ist dieses Argument gültig?

3. Wir sehen, dass die Reihenfolge eines Arguments sehr wichtig ist! Wo genau habe ich bei einem dieser zwei Argumente einen Fehler gemacht?
4. Beginnen wir nun mit dem (sehr albernen) Axiom: $[2 = 1]$. Multipliziere beide Seiten dieser Gleichung mit 2, um $4 = 2$ zu erhalten. Ziehen Sie nun 1 von beiden Seiten ab, um $4 - 1 = 2 - 1$ zu finden. Wir können die linke Seite davon faktorisieren und erhalten somit $(2 + 1)(2 - 1) = (2 - 1)$. Aber wir haben am Anfang angenommen, dass $2 = 1$ ist, also muss der Klammerausdruck $(2 - 1)$ gleich Null sein. Unsere bisherige Berechnung lautet also $(2 + 1) \times 0 = 0$, also ist $0 = 0$. Aber diese Gleichung ist wirklich wahr! Also muss also auch unser Axiom wahr sein, also ist wirklich $2 = 1$. Waaas?! Besprich mit einem Partner, was genau an meinem Argument so idiotisch ist. (Obacht: Der Fehler ist nicht meine Annahme, dass $2 = 1$!)
5. Beim Ausführen eines Algorithmus dürfen wir nie rückwärts rechnen: *Wir müssen immer vorwärts rechnen!* Verwende die Axiome $[a \times 1 \equiv a]$ und $[\log(a \times b) \equiv \log(a) + \log(b)]$, um zu beweisen, dass $\log(1) \equiv 0$.

Threshold 4: Grenzwerte

Ein **Grenzwert** ist eine Möglichkeit, immer bessere Annäherungen an einen Wert zu finden, den wir nur schwer berechnen können. Wenn beispielsweise x näher an 0° herankommt, nähert sich der Ausdruck $\cos(x)$ immer mehr 1 an, und wir schreiben: $\lim_{x \rightarrow 0^\circ} [\cos(x)] = 1$ (also „Der Grenzwert von $\cos(x)$ bei x gegen 0° ist 1.“).

6. Was ist der Wert von $\lim_{x \rightarrow 90^\circ} [\cos(x)]$, und wie würdest Du das in Worten sagen?
7. Was ist der Wert von 0^2 ? Was ist der Wert von 0^1 ? ... $0^{\frac{1}{2}}$? ... $0^{\frac{1}{3}}$? Was ist 0^0 ?
8. Was ist der Wert von 2^0 ? Was ist der Wert von 1^0 ? ... $(\frac{1}{2})^0$? ... $(\frac{1}{3})^0$? Was ist 0^0 ?
9. Du hast jetzt zwei verschiedene Antworten für 0^0 gefunden – welche ist richtig? Wir können diese Frage nicht beantworten, aber wir können tiefer untersuchen, indem wir einen Grenzwert bilden. Konstruiere zunächst eine ähnliche Frage, die wir beantworten können, wie zum Beispiel: Was ist 3^3 ? Erstelle nun eine Reihe von Fragen, die zu unserer ursprünglichen Frage führen: Was ist 2^2 ? Was ist 1^1 ? Was ist $0.5^{0.5}$? Was ist $0.4^{0.4}$? Was ist $0.3^{0.3}$? Was ist $0.2^{0.2}$? Was ist $0.1^{0.1}$? Was ist $0.01^{0.01}$? Benütze Deinen Taschenrechner um diese Fragen zu beantworten.
10. Was ist der Grenzwert $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\epsilon^\epsilon]$? Was denkst Du ist jetzt der Wert von 0^0 ?
11. Probieren wir nun eine neue Situation. Was ist der Wert von $\lim_{x \rightarrow 0} [\sin(x)]$? Was ist in diesem Fall Deiner Meinung nach der Wert von $\sin(0)/0$? Stelle sicher, dass Dein Taschenrechner auf Bogenmaß oder RAD-Modus zum Messen von Winkeln eingestellt ist, und verwende ihn dann, um $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(x)}{x} \right]$ zu untersuchen.
12. Was ist die Beziehung zwischen den Werten von x und $\sin(x)$ bei immer kleineren Werten von x ?

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

Was ist eine Quadratik?

Eine **Polynomfunktion** ist eine Funktion der Form $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ konstante **Koeffizienten** sind. y ist hier die **abhängige**, und x die **unabhängige** Variable, da wir den Wert von y aus dem Wert von x eindeutig berechnen können. Der **Grad** des Polynoms ist seine höchste Potenz von x , und seine assoziierte **Polynomgleichung** ist $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots = 0$.

Zum Beispiel: Eine **Quadratik** ist ein Polynom *zweiten* Grades; es hat also die allgemeine Form $y = ax^2 + bx + c$, wobei $a \neq 0$. Die assoziierte quadratische Gleichung ist $ax^2 + bx + c = 0$. Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Kurve, deren Form eine **Parabel** heißt.

Theorem: Um eine Parabel zu skizzieren, finde die *Form*, die *Achsenabschnitte* und die *Achsensteigung*.

Das Vorzeichen von a bestimmt die \cup - oder \cap -Form der Parabel

Beispiel – Hat die Quadratik $y = 2x^2 - 4x + 3$ eine \cup - oder eine \cap -Form?

Der Koeffizient a des quadratischen Terms ist die *positive* Zahl 2; diese Quadratik hat also eine \cup -Form. ■

Beispiel – Was ist die Form der Quadratik $y = 8 - 2x - x^2$?

Der Koeffizient a des quadratischen Terms ist die *negative* Zahl -1; die Quadratik hat also eine \cap -Form. ■

Setze $x = 0$ und $y = 0$ um die Achsenabschnitte zu finden

Beispiel – Was sind die Achsenabschnitte der Quadratik $y = 2x^2 - 4x + 3$?

Setzen wir $x = 0$, ist $y = 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$; hier schneidet die Kurve die y -Achse. Setzen wir $y = 0$, gilt: $2x^2 - 4x + 3 = 0$. Diese Gleichung hat die *Diskriminante* (lernen wir unten) $b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 2 \times 3 = -8 < 0$ und besitzt also *keine* Lösung; die Kurve schneidet die x -Achse also *nicht*. ■

Beispiel – Was sind die Achsenabschnitte der Quadratik $y = 8 - 2x - x^2$?

Setzen wir $x = 0$, gilt $y = 8 - 2 \cdot 0 - 0^2 = 8$: das ist also der y -Abschnitt. Setzen wir $y = 0$, gilt $8 - 2x - x^2 = 0$. Wir können diese Gleichung *faktorisieren* (lernen wir unten kennen): $(x + 4)(2 - x) = 0$. Die Lösungen sind also $x = -4$ und $x = 2$, und das sind die Nullstellen: diejenigen Stellen auf der Kurve, bei den $y = 0$. Die Nullstellen sind also die x -Abschnitte der Quadratik. ■

b gibt die Steigung beim y -Abschnitt an

Beispiel – Was ist die Steigung der Quadratik $y = 2x^2 - 4x + 3$ bei der y -Achse?

Der Koeffizient b des linearen Terms ist die *negative* Zahl -4 ; die Quadratik ist also ziemlich stark absteigend, wenn sie die y -Achse schneidet (s. oben). ■

Beispiel – Was ist die Steigung der Quadratik $y = 8 - 2x - x^2$ bei der y -Achse?

Der Koeffizient b des linearen Terms ist die *negative* Zahl -2 ; die Quadratik ist also leicht absteigend, wenn sie die y -Achse schneidet (zeichne rechts). ■

Faktorisieren findet also die Nullstellen einer Quadratik. Aber wie geht das?

Faktorisieren ist einfach, solange $a = 1$

Beispiel – Löse die Gleichung $x^2 - 8 = 2x$ durch Faktorisieren:

1. Stelle die Gleichung in die Form $ax^2 + bx + c = 0$ um:

$$\begin{aligned}x^2 - 8 &= 2x \\ \Rightarrow x^2 - 2x - 8 &= 0\end{aligned}$$

Also ist $a = 1; b = -2; c = -8$.

2. Schreibe zwei Klammerausdrücke hin: $x^2 - 2x - 8 \equiv (x \quad)(x \quad)$.
3. Suche nach zwei Zahlen, deren Produkt gleich c und Summe/Differenz gleich b ist (für jetzt ignorieren wir die Minus-Vorzeichen). In unserem Fall ist also $8 = 8 \times 1 = 4 \times 2$. Die Summe und Differenz von 8 und 1 sind 9 und 7; die Summe und Differenz von 4 und 2 sind 6 und 2.
4. Suche nach den Vorzeichen. Trage die richtige Kombination in die Klammerausdrücke ein: $x^2 - 2x - 8 \equiv (x - 4)(x + 2)$, und trage dann die Plus-/Minus-Zeichen ein: $x^2 - 2x - 8 \equiv (x - 4)(x + 2)$.
5. Jetzt lösen wir die Gleichung. Bis jetzt haben wir die Gleichung nur faktorisiert – wir müssen sie noch lösen:

$$\begin{aligned}(x - 4)(x + 2) &= 0 \\ \Rightarrow x - 4 = 0 \text{ oder } x + 2 = 0 \\ \Rightarrow x = 4 \text{ oder } x = -2 \blacksquare\end{aligned}$$

Noch ein Beispiel – Löse die Gleichung $x^2 + 4x - 21 = 0$ durch Faktorisieren:

$$x^2 + 4x - 21 \equiv (x \quad)(x \quad)$$

1 und 21 multiplizieren auf 21; und addieren/subtrahieren auf 22 oder 20; 3 und 7 multiplizieren auf 21; und addieren/subtrahieren auf 10 und 4, also:

$$x^2 + 4x - 21 \equiv (x + 7)(x - 3)$$

und $x = -7$ oder $x = 3$ ■

Wie faktoriere ich, wenn $a \neq 1$?

Beispiel – Faktoriere den Ausdruck $3x^2 + 4x - 15$.

1. Schreibe zwei Klammerausdrücke hin, aber diesmal mit Termen, deren Produkt $3x^2$ ergibt: $3x^2 + 4x - 15 \equiv (3x \quad)(x \quad)$.
2.
$$\begin{cases} (3x - 1)(x - 15) \rightarrow x \text{ und } 45x \rightarrow 46x \text{ oder } 44x \\ (3x - 3)(x - 5) \rightarrow 3x \text{ und } 15x \rightarrow 18x \text{ oder } 12x \\ (3x - 5)(x - 3) \rightarrow 5x \text{ und } 9x \rightarrow 14x \text{ oder } 4x \end{cases}$$
3. Vorzeichen einfügen: $3x^2 + 4x - 15 \equiv (3x - 5)(x + 3)$ ■

Wenn Faktoren total schwierig sind, benütze einfach die Mitternachtsformel!

Die Mitternachtsformel: ein zweischneidiges Laserschwert

Die Mitternachtsformel liefert immer die Nullstellen einer Quadratik:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Beispiel – Finde die *exakten* Lösungen der Gleichung $3x^2 - 4x = 8$.

1. Bringe die Gleichung in die Standardform um a, b, c zu finden:

$$3x^2 - 4x - 8 = 0$$

2. Schreibe die Koeffizienten auf: $a = 3; b = -4; c = -8$.
3. Setze sie in die Mitternachtsformel ein (Achtung: Minuszeichen!). Um Fehler zu vermeiden, schreibe *jeden* Schritt auf:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 3 \times (-8)}}{2 \times 3} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 96}}{6} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{112}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{3} \\ x &= \frac{2 + 2\sqrt{7}}{3} \quad \text{or} \quad x = \frac{2 - 2\sqrt{7}}{3} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Die Diskriminante liefert uns die Anzahl der Nullstellen

Die **Diskriminante** ist der Term $\Delta = b^2 - 4ac$ unter der Wurzel in der Mitternachtsformel. Durch Einsetzen von a, b und c in die Diskriminante finden wir einfach heraus, wie viele Nullstellen die Quadratik hat:

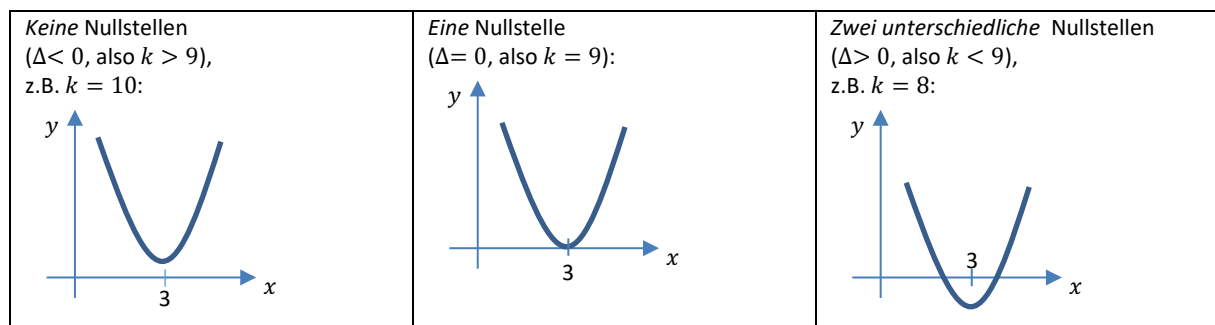
- $\Delta < 0$: Es gibt 0 Nullstellen, weil negative Zahl keine (reelle) Wurzel hat.
 - $\Delta = 0$: Es gibt 1 Nullstelle, weil $\pm\sqrt{0} = +0$.
 - $\Delta > 0$: Es gibt 2 Nullstellen, weil die Wurzel addiert/subtrahiert wird.
1. Wie viele Nullstellen hat die Quadratik $15 - x - 2x^2$?

Manchmal sind die Koeffizienten unbekannt

Beispiel – Sei $f(x) = x^2 - 6x + k$, wobei k unbekannt ist. Finde die Definitionsbereiche von k , in den $f(x)$ zwei, eine oder keine Nullstellen hat.

1. Finde die Koeffizienten: $a = 1; b = -6; c = k$.
2. Berechne Diskriminante: $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times k = 36 - 4k$.
3. *Keine* Nullstelle bedeutet: $36 - 4k < 0$, also $36 < 4k$, oder $k > 9$.
4. *Eine einzige* Nullstelle: $36 - 4k = 0$, also $36 = 4k$, oder $k = 9$.
5. *Zwei distinkte* Nullstellen: $36 - 4k > 0$, also $4k < 36$ oder $k < 9$. ■

Schaue diese drei Graphen an um Dir ein Bild davon zu machen, wie diese drei Situationen graphisch zustande kommen:



Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt gemeinsam!

Algorithmen

13. The **conjugate** of a mexclop $u = \{a|b\}$ is a new mexclop, written \bar{u} , that we compute by performing the substitution: $\{a|b\} \mapsto \{a|-b\}$. Write down a mexclop of your own, then calculate its conjugate by performing this substitution.
14. Swap your work with another group and check whether that group has computed the conjugate correctly.
15. Compute for your own chosen mexclop the product $u \times \bar{u} = \{a|b\} \times \{a|-b\}$.
16. Choose a new mexclop und compute $u \times \bar{u}$. What do you notice?
17. Discuss your result with other groups, and formulate a general hypothesis about the value of $u \times \bar{u}$.
18. Prove your hypothesis: execute an algorithm that leads from the axiom $[\bar{u} \equiv \{a|-b\}]$ to your hypothesis from the previous exercise. You may use additional axioms in your proof if you wish. If you can prove the hypothesis for *all possible* mexclops, you are entitled to call the hypothesis a theorem, and to call yourself a mathematician!

Grenzwerte

In our work on proportionality, we saw that the *average* speed of a moving car is $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, but how can I calculate the *instantaneous* speed of the car, if that speed is constantly changing? To measure that, I'd have to measure the change in position Δs over a *really, really tiny* time-step Δt . In fact, I would be interested in the limit $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right]$.

Historically, the first people to study this limit were Isaac Newton and Gottfried Leibnitz around 1680. Newton wanted to describe planets moving at changing speeds, but Leibnitz was more interested in how a *control-knob* changes the reading on a *display* ...

19. Think of an example of a *control-display* device from your experience. It might be the (*gas pedal*)-(*revs meter*) of a car, the (*knob*)-(*hotplate thermometer*) of a stove, the (*shaking force*)-(*number of apples*) when shaking an apple-tree, or anything else you like. The important thing is that you know which is the *switch*: the variable that you can control *independently*; and which is the **display**: the variable whose value is **dependent** on the control – you can measure it, but you cannot directly influence it.
20. Now we will use your favourite control-display device to study the movement of a stone dropping down a well. The *control* is the time t : we can *independently* control the particular time at which we wish to measure how far the stone has fallen. The *display* is the depth D of the falling stone: we cannot directly influence it, but it is *dependent* on the time at which we measure it. Take a moment to think how t and D look in your control-display device.
21. Galileo taught us that $D = 5t^2$. What is the depth $D(0s)$ of the stone at time $t = 0s$?
22. What is the depth $D(1s)$ of the stone after 1s (at time $t = 1s$)?
23. What is the depth $D(t)$ of the stone after time $t = 2s, 3s$ and $4s$?
24. What is happening to the distance the stone falls in each individual second?
25. What does this tell us about the speed of the stone as t increases?
26. How far must we turn the control knob from $t = 0s$ to $t = 1s$? We call this amount Δt : the increase in time from $t = 0s$ to $t = 1s$. What is the value of Δt ?
27. What is the value ΔD of the increase in depth from $t = 0s$ to $t = 1s$?
28. What is the average speed $\langle v \rangle = \Delta D / \Delta t$ from $t = 0s$ to $t = 1s$?
29. What is the average speed $\langle v \rangle = \Delta D / \Delta t$ from $t = 1s$ to $t = 2s$?

30. What is the average speed $\langle v \rangle = \Delta D / \Delta t$ from $t = 2\text{s}$ to $t = 3\text{s}$?
31. What is the average speed $\langle v \rangle = \Delta D / \Delta t$ from $t = 3\text{s}$ to $t = 4\text{s}$?
32. How far must we turn the control knob from time t to time $t + \Delta t$?
33. What is the depth $D(t)$ of the stone after a time t ?
34. What is the depth $D(t + \Delta t)$ of the stone after a time $t + \Delta t$?
35. What is the value ΔD of the increase in depth from time t to time $t + \Delta t$?
36. What is the average speed $\langle v \rangle = \Delta D / \Delta t$ from time t to time $t + \Delta t$?
37. Now comes Leibnitz's greatest moment: What is the average speed if we make Δt really, really tiny? That is, what is the *instantaneous speed* $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta D}{\Delta t} \right]$?
38. Check your value for $v(t)$ for $t = 0.5\text{s}$, $t = 1.5\text{s}$, $t = 2.5\text{s}$ and $t = 3.5\text{s}$. Do these values match your earlier values for the average speed?
39. Leibnitz used a special name for this: we call $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta D}{\Delta t} \right]$ the **derivative** of D with respect to t , and we write the derivative like this: $\frac{dD}{dt}$. You have discovered that if $D = 5t^2$, then $\frac{dD}{dt} = 10t$. That is, the derivative of $5t^2$ is $10t$. Does this fit with anything you learned in school?

Quadratiken

40. Faktorisiere diese Quadratiken: (a) $x^2 + 2x + 1$; (b) $x^2 - 13x + 30$; (c) $x^2 - 4$; (d) $3 + 2x - x^2$; (e) $2x^2 - 7x - 4$; (f) $5x^2 + 7x - 6$.
41. Bei welchen Werten von k hat $x^2 + kx + 4 = 0$ zwei Nullstellen?
42. Finde eine quadratische Gleichung, deren Nullstellen bei 1 und 3 liegen und deren x^2 -Koeffizient gleich ± 1 ist.
43. Finde drei verschiedene Beispielquadratiken mit Nullstellen 1 und 2.
44. Wir nennen den Abstand zwischen den Nullstellen einer Quadratik der **Internull-Abstand**. Stelle Dir eine Beispielquadratik mit genau zwei Nullstellen vor. Beschreibe mathematisch die Familie *aller* Quadratiken, die alle denselben Internull-Abstand wie Dein Beispiel haben.
45. Finde drei verschiedene Quadratiken, die alle durch den Punkt (0,4) führen. Was bedeutet der x -Koeffizient in jedem dieser Fälle?
46. Beschreibe die Familie *aller* Quadratiken, die durch den Punkt (0,4) führen. Was bedeutet der x -Koeffizient in jeder dieser Quadratiken?
47. Die Gleichung $x^2 + 2kx + 4k = 0$, wobei k ein nicht-null Integer ist, hat gleichwertige Lösungen. Finde den Wert von k .
48. Die Gleichung $px^2 + (p + 3)x + 4 = 0$ hat zwei verschiedene reelle Lösungen für x (p ist eine Konstante). (a) Zeige, dass $p^2 - 10p + 9 > 0$. (b) Bestimme somit den Definitionsbereich von p .
49. Angenommen, dass $5x^2 + nx + 14 \equiv m(x + 2)^2 + p$, finde den Wert der drei Integer m , n und p .
50. (a) Benütze die Mitternachtsformel um eine exakte Lösung der Gleichung $x^2 - 14x + 25 = 0$ zu finden. (b) Skizziere die Kurve der Funktion $y = x^2 - 14x + 25$ und beschrifte die Schnittpunkte der Kurve mit den x - und y -Achsen. (c) Löse die Ungleichung $x^2 - 14x + 25 \leq 0$.
51. (a) Schreibe den Ausdruck $10x - x^2 - 27$ in die Form $-(m - x)^2 + n$ um, wobei m und n Integer sind. Zeige somit, dass $10x - x^2 - 27$ immer negativ ist. (b) Gib die Koordinaten des Maximumpunkts der Kurve $y = 10x - x^2 - 27$ an. Skizziere die Kurve und finde, wo diese die y -Achse schneidet. Gib die Gleichung der Symmetrieachse der Kurve an.

Numerische Ergebnisse

40: [a] $(x + 1)^2$; c) $(x + 2)(x - 2)$; e) $(2x + 1)(x - 4)$

41: $[(k < -4) \vee (k > 4)]$

47: [4]

48: $[p \in \mathbb{R} \setminus [1, 9]]$

49: [5, 20, -6]

50: [a] $x = 7 \pm 2\sqrt{6}$; c) $x \in [7 - 2\sqrt{6}, 7 + 2\sqrt{6}]$

51: [a] $m = 5, n = -2, -(5 - x)^2 - 2$; b) $(5, -2)$

Konstruktionsübung: Prüfungsvorbereitung!

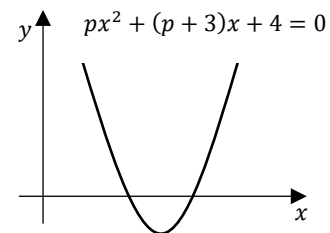
Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Die Gleichung $px^2 + (p + 3)x + 4 = 0$ hat zwei verschiedene reelle Lösungen für x (p ist eine Konstante). Zeige, dass $p^2 - 10p + 9 > 0$ und bestimme somit die Menge der möglichen Werte von p .

Musterlösung:

Folgen

Die gegebene Gleichung ist quadratisch. Wir wissen, dass wenn eine quadratische Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen hat, dann hat die entsprechende Kurve die x -Achse an zwei Stellen und ihre Diskriminante Δ muss einen positiven Wert haben ($\Delta > 0$).



Engagieren

Wir brauchen die Koeffizienten a , b und c der Gleichung, um die Diskriminante zu bilden. Weil wir wissen, dass $\Delta > 0$ sein muss, müssen wir anschließend die Werte von p finden, die diese Bedingung erfüllen. Tipp: überlege, wo dies nicht der Fall ist.

Abstrahieren

1. Ermittle die Koeffizienten a , b und c der quadratischen Gleichung.
2. Setze sie in die Formel der Diskriminante (Δ) ein und zeige, dass $p^2 - 10p + 9 > 0$.
3. Ermittle die Werte von p , für die gilt: $\Delta > 0$. Berechne dazu die Nullstellen.

Anwenden

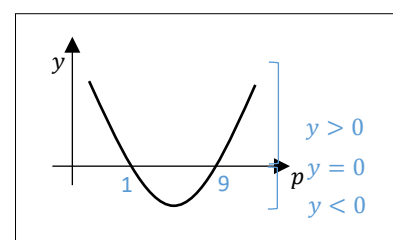
1. Seien $a = p$; $b = p + 3$; $c = 4$ die Koeffizienten der Quadratik.
2. Damit die Quadratik zwei Lösung hat, muss gelten: $\Delta > 0$, wobei $\Delta = b^2 - 4ac$. Also:

$$\begin{aligned} & b^2 - 4ac > 0 \\ \Rightarrow & (p + 3)^2 - 4 \times p \times 4 > 0 \\ \Rightarrow & p^2 + 6p + 9 - 16p > 0 \\ \Rightarrow & \underline{p^2 - 10p + 9 > 0} \end{aligned}$$

3. Wir ermitteln die Nullstellen durch Faktorisieren:

$$\begin{aligned} & p^2 - 10p + 9 = 0 \\ \Rightarrow & (p - 1)(p - 9) = 0 \\ \Rightarrow & p = 1; p = 9 \end{aligned}$$

Also:



$$\begin{aligned} & p^2 - 10p + 9 > 0 \\ \Rightarrow & (p - 1)(p - 9) > 0 \\ \Rightarrow & p < 1; p > 9 \\ \Rightarrow & p \in \mathbb{R} \setminus [1, 9] \end{aligned}$$

Ergebnis folgen

Der führende Term der Quadratik in p ist p^2 . Wir würden also erwarten, dass bei großen Beträgen von q diese Quadratik weit über Null steigen würde, was mit unserem Ergebnis übereinstimmt.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Die Gleichung $x^2 + 2kx + 4k = 0$, wobei k ein nicht-null Integer ist, hat zwei gleichwertige Lösungen. Finde den Wert von k .