Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 04: Wie *erklärt* Physik Veränderungen?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

- Akkumulation anwenden, um zu erklären, wie Kräfte auf einen Körper wirken.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

- ***Physik*** benützt Mathematik um unser Erfahren zu *beschreiben* und *erklären*.
- ***Akkumulation*** sammelt viele kleine Beiträge zu einem Gesamtergebnis.

Threshold 6: Akkumulation

Akkumulation ist die sehr fundamentale Idee, dass viele kleine Beiträge eine große Wirkung haben können. Stelle Dir zum Beispiel vor, Du fährst in den Urlaub, und dabei hinterlässt Du versehentlich den Wasserhahn leicht tropfen und das Abflussloch zu. Der Tropfen ist winzig, aber wenn du lange genug wegbleibst, wird er dein Zuhause ruinieren!

In der Wissenschaft fragen wir: *Was bewirkt, dass Dinge passieren?* Und für viele natürliche Systeme – zum Beispiel die Entstehung von Kontinenten, die Evolution des Menschen, die Erwärmung unserer Atmosphäre – lautet die Antwort, dass diese Dinge das Ergebnis vieler Beiträge sind, die sich über lange Zeit ansammeln.

1. Als erstes Beispiel der Akkumulation kreieren wir jetzt ein ***Freikörperdiagram***: Zeichne mitten im leeren Bereich rechts ein kleines schwarzes Quadrat. Das ist Deine hochkünstlerische Darstellung eines Autos!
2. Zeichne einen Pfeil, der von der Mitte des Autos *nach unten* zeigt, und beschrifte diesen Pfeil mit $\underline{G}$, um die **G**ewichtskraft des Autos darzustellen. Wir unterstreichen das $\underline{G}$, um zu zeigen, dass das Gewicht nicht nur einen *Betrag*, sondern auch eine *Richtung* hat – es ist tatsächlich so, dass *alle* Kräfte (zum Beispiel $\underline{G}$) Vektoren sind. Angenommen, dass $\underline{G}$ die einzige Kraft wäre, die auf das Auto einwirkt, in welche Richtung würde es das Auto schieben?

Wichtig: Wir kennen jetzt zwei unterschiedliche Denkweisen über Vektoren: als Komposition von Komponenten oder als Pfeil. Beide sind gute Möglichkeiten, Vektoren zu verstehen, und beide bieten unterschiedliche Vorteile. Wir kennen auch zwei verschiedene Arten, einen Vektor zu schreiben: als **fetten** Buchstaben ($\boldsymbol{G}$) oder als unterstrichenen Buchstaben ($\underline{G}$). Normalerweise verwenden wir Unterstreichung, wenn wir von Hand schreiben, und wir verwenden **Fettdruck**, wenn wir Drucktext wie diesen eingeben.

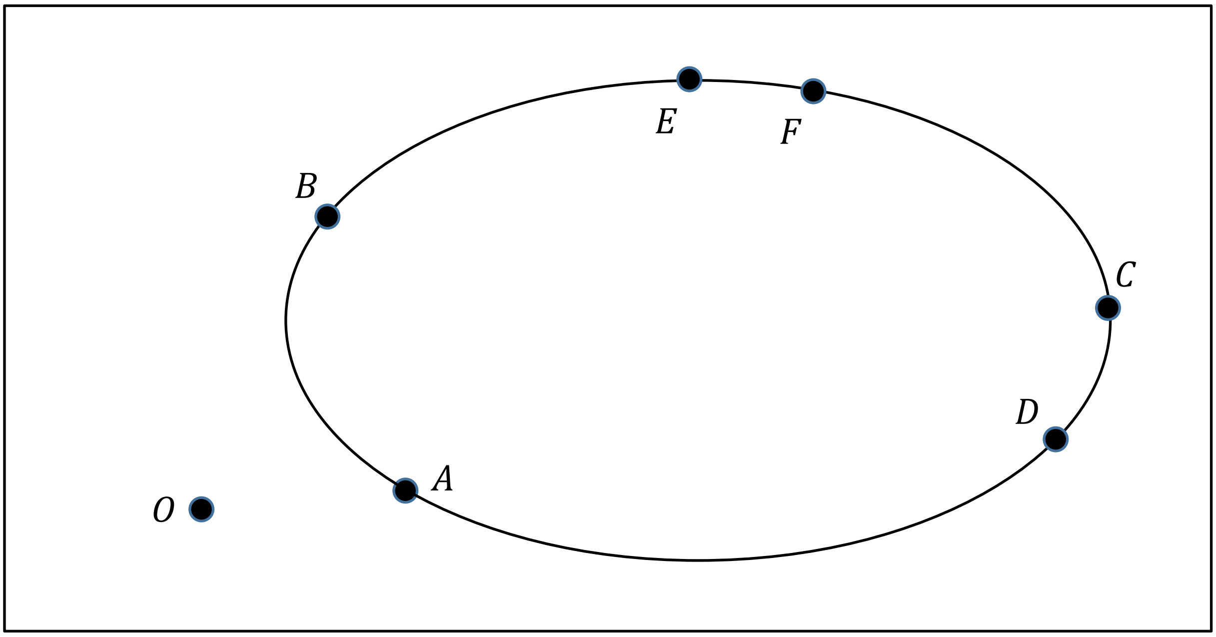
3. In einem Freikörperdiagramm zeichnen wir *immer nur einen Körper*, der geschoben wird: unser Auto. Außerdem müssen wir die Ursache jeder Kraft im Diagramm kennen.

Das heißt, wer wirkt genau auf das Auto ein, um diese Kraft zu verursachen? Wenn wir keinen Urheber einer Kraft finden können, müssen wir irgendwo einen Fehler gemacht haben! Wer glaubst Du verursacht also das Gravitationsgewicht $\underline{G}$ unseres Autos?

4. Zum Glück (!) für den Fahrer ***akkumuliert*** unser Auto die Wirkung *jeder neuen Kraft*. Das heißt, jede neue Kraft addiert ihre Wirkung zu allen anderen auf das Auto einwirkenden Kräften. Zeichne einen Pfeil, der von der Mitte des Autos *nach oben* zeigt, und beschrifte diesen Pfeil mit $\underline{N}$. Diese neue Kraft verhindert, dass unser Auto nach unten durch den Boden fällt! Wer ist ihr Urheber?
5. Okay, unser Auto fällt nicht mehr durch den Boden, also beschleunigen wir es nach rechts: Zeichne einen Pfeil, der von der Mitte des Autos *nach rechts* zeigt, und beschrifte diesen Pfeil mit $\underline{A}$ – es ist die ***A****ntriebskraft* des Autos. Und jetzt kommt eine *wirklich* schwierige Frage: Wer ist der Urheber von $\underline{A}$? Das heißt, *wer greift von außen auf das Auto ein, um es voranzutreiben?* Ist es der Motor? Aber das gehört doch zum Auto! Wer greift von außen ins System ein? Wer berührt das Auto, um es nach vorne zu schieben? Die Antwort ist ziemlich überraschend!
6. Jetzt haben wir drei Kräfte, die auf das Auto wirken: $\underline{G}$ hält es am Boden; $\underline{N}$ verhindert, dass es durch den Boden fällt; $\underline{A}$ beschleunigt es vorwärts. Aber wenn das Auto nur vorwärts beschleunigt, würde seine Geschwindigkeit phantastisch hoch steigen – vielleicht auf Lichtgeschwindigkeit! Es muss doch eine andere Kraft geben, die es verlangsamt. In welche Richtung wirkt es? Wer ist der Urheber? Was wäre ein gutes Symbol dafür? Vervollständige jetzt Dein Freikörperdiagramm mit dieser neuen Kraft.

Position akkumuliert Geschwindigkeit über Zeit

Dieses Diagramm zeigt die elliptische Bahn des Planeten Mars, während er sich um die Sonne bewegt. Der mit O (für Origin) markierte Punkt ist der Ursprung, den ich für unser Koordinatensystem gewählt habe, und die mit A und B markierten Punkte sind zwei verschiedene Orte, die der Mars zu verschiedenen Jahreszeiten haben könnte.



7. Zeichne in dieses Diagramm die beiden ***Ortsvektoren*** $\boldsymbol{r}_A$ and $\boldsymbol{r}_B$ der Orte A und B ein (diese führen vom Ursprung zum jeweiligen Ort). Zeichne auch den ***Verschiebungsvektor*** $\Delta\boldsymbol{r}$, der die Verschiebung von A nach B darstellt.

8. Beschreibe, wie Du den Verschiebungsvektor $\Delta\boldsymbol{r}$ verwenden kannst, um die Richtung der Durchschnittsgeschwindigkeit des Mars zwischen A und B zu bestimmen. Zeichne einen Vektor, der diese Durchschnittsgeschwindigkeit darstellt.
9. Wähle einen Punkt auf der Flugbahn zwischen A und B und beschrifte diesen Punkt mit B'. Wenn wir diesen Punkt B' immer näher an Punkt A wählen würden, würde sich dann die Richtung der mittleren Geschwindigkeit über das Intervall $\overline{AB'}$ überhaupt ändern? Wenn ja, wie würde es sich ändern?
10. Beschreibe die Richtung der momentanen Geschwindigkeit des Mars am Punkt A.
11. Wie würdest Du die Richtung der momentanen Geschwindigkeit an einem *beliebigen* Punkt der Flugbahn beschreiben? Hängt Deine Antwort davon ab, ob sich Mars beschleunigt, verlangsamt oder mit konstanter Geschwindigkeit bewegt? Begründen!
12. Wenn Du einen *anderen* Punkt als Ursprung des Koordinatensystems wählen würdest, welche der gezeichneten Vektoren würden sich ändern und welche *nicht*?

Geschwindigkeit akkumuliert Beschleunigung über Zeit

13. Angenommen, der Mars würde sich mit *konstanter* Geschwindigkeit um seine Umlaufbahn bewegen. Zeichne ins Diagramm oben Vektoren, um die Geschwindigkeit an zwei Punkten C und D darzustellen, die ziemlich nahe beieinander liegen. (Zeichne diese Vektoren *groß*!)
14. Generell (*abgesehen von Ortsvektoren!*) können wir Vektoren beliebig verschieben, um sie miteinander zu vergleichen. Kopiere also Deine beiden Vektoren $\boldsymbol{v}_C$ and $\boldsymbol{v}_D$ in den neuen Zeichenbereich rechts, so dass ihre Füße zusammen stehen. Dann zeichne und beschrifte den Geschwindigkeitsänderungs-Vektor $\Delta\boldsymbol{v}$, den wir zu der früheren Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_C$ addieren müssten, um der späteren Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_D$ gleichzukommen. ($\Delta\boldsymbol{v}$ führt vom Kopf von $\boldsymbol{v}_C$ zum Kopf von $\boldsymbol{v}_D$.)
15. Markiere im Zeichenbereich den Winkel θ (sprich es so aus: *Theta*), der zwischen dem *Kopf* von $\boldsymbol{v}_C$ und dem *Fuß* von $\Delta\boldsymbol{v}$ gebildet wird. Ist θ *größer*, *kleiner* oder *gleich* $90°$?
16. Angenommen, wir rücken Punkt D immer näher an Punkt C heran. Würde dadurch der Winkel θ *größer*, *kleiner* oder *gleich* bleiben? Erkläre, woher Du das weißt.
17. Hat dieser Winkel θ einen Grenzwert, wenn D sich C nähert? Mit anderen Worten, was ist der Wert von $\lim\limits_{D \to C}[\theta]$?
18. Beschreibe, wie Du den Geschwindigkeitsänderungsvektor $\Delta\boldsymbol{v}$ verwendest, um die Durchschnittsbeschleunigung des Mars zwischen den Punkten C und D zu berechnen. Zeichne einen Vektor für die Durchschnittsbeschleunigung zwischen C and D.
19. Was passiert mit dem Betrag von $\Delta\boldsymbol{v}$, wenn wir den Punkt D immer näher an C wählen? Mit anderen Worten, was ist der Wert von $\lim\limits_{D \to C}|\Delta\boldsymbol{v}|$? Ändert sich die Beschleunigung auf die gleiche Weise? Begründen!
20. Denke an die *Richtung* der Beschleunigung am Punkt C. *Wir definieren den Winkel zwischen zwei Vektoren als den Winkel, der gebildet wird, wenn sie von Fuß zu Fuß platziert werden*. Ist der Winkel zwischen Beschleunigungsvektor und Geschwindigkeitsvektor *größer*, *kleiner* oder *gleich* $90°$?
21. Denke nun an den obersten Punkt der Marsbahn, E, an dem die Krümmung viel geringer ist als bei C. Ist der *Betrag* der Beschleunigung bei E *größer*, *kleiner* oder *gleich* dem Betrag der Beschleunigung bei C?
22. Beschreibe die *Richtung* der Beschleunigung beim Punkt E.

Akkumulation: Der Schlüssel zur Vorhersage der Zukunft

Aus diesen Untersuchungen hast Du entdeckt, dass die Beschleunigung *ständig* die Geschwindigkeit (ein Vektor!) des Mars verändert – manchmal beschleunigt, manchmal verlangsamt und manchmal seine Richtung ändert:

- *Die <u>Geschwindigkeit</u> des Mars in jedem einzelnen Moment ist das akkumulierte Ergebnis aller Geschwindigkeitsänderungen aufgrund vergangener <u>Beschleunigungen</u>!*
- *Ähnlicherweise ist die <u>Position</u> des Mars in jedem einzelnen Moment das akkumulierte Ergebnis aller Positionsänderungen aufgrund vergangener <u>Geschwindigkeiten</u>!*

Ressourcen: <u>Überfliege</u> diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

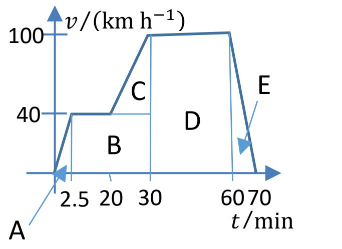
Tempo-Zeit-Graphen: Fläche=Verschiebung; Steigung=Beschleunigung

Beispiel – Der *v/t* Graph rechts zeigt das Tempo eines Zugs über Zeit. Finde die Gesamtverschiebung und Bremsbeschleunigung am Ende.

Zeit ist in min angegeben; *v* in km/h. Wir müssen also die Zeit durch 60 teilen:

- Fläche A: $(2.5/60) \times 40/2 = 0.833 \ldots$
- Fläche B: $(27.5/60) \times 40 = 18.33 \ldots$
- Fläche C: $(10/60) \times 60/2 = 5$
- Fläche D: $(30/60) \times 100 = 50$
- Fläche E: $(10/60) \times 100/2 = 8.33 \ldots$
- Gesamtverschiebung ist also die Summe dieser Werte: <u>82.5 km</u>.

Zug (*v/t*):



Die Steigung des Graphs am Ende der Fahrt ergibt die Bremsbeschleunigung:

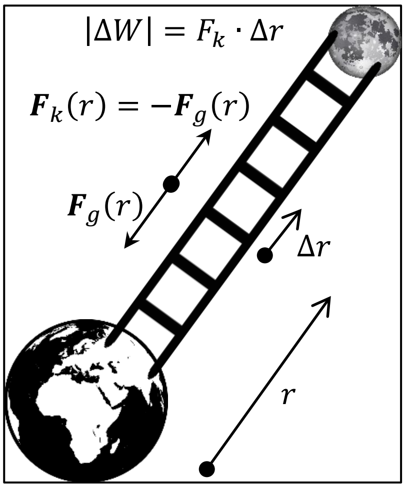
$$-100\ \mathrm{km\ h^{-1}}/(10/60\ \mathrm{h}) = -600\ \mathrm{km\ h^{-2}}\ \blacksquare$$

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt <u>*gemeinsam*</u>!

Beschleunigung akkumulieren

23. Es gibt viele Situationen, in denen kumulative Auswirkungen im Laufe der Zeit enorm werden. Stelle Dir zum Beispiel eine Epidemie vor, bei der jeder Infizierte jeden Tag zwei gesunde Menschen ansteckt. Wenn wir mit 1 Infizierten beginnen, sind nach einem Tag 3 Personen infiziert; nach zwei Tagen 9; nach drei Tagen 27; nach vier Tagen 81; und so weiter. Wie viele Menschen sind nach drei Wochen infiziert?
24. Schaue Dir noch einmal das Diagramm der Marsbahn an. Nehmen wir an, dass der Mars am Punkt E *schneller* wird, während er sich um die Sonne bewegt. Zeichne (*große*) Vektoren im Mars-Diagramm, um die Geschwindigkeit des Mars an den beiden Punkten E und F darzustellen.
25. Kopiere diese beiden Vektoren $\boldsymbol{v}_E$ and $\boldsymbol{v}_F$ in den Zeichenbereich rechts und ermittele somit den Geschwindigkeitsänderungsvektor $\Delta\boldsymbol{v}$.
26. Markiere rechts den Winkel θ, der zwischen dem *Kopf* von $\boldsymbol{v}_E$ und dem *Fuß* von $\Delta\boldsymbol{v}$ gebildet wird. Ist θ *größer*, *kleiner* oder *gleich* $90°$?
27. Denke darüber nach, was mit θ passiert, wenn wir den Punkt F so wählen, dass er immer näher am Punkt E liegt. Wenn der Mars schneller wird, welcher Wertebereich ist für θ möglich? Begründe Deine Antwort.
28. Was passiert mit dem Betrag von $\Delta\boldsymbol{v}$, wenn wir den Punkt F immer näher an E wählen? Mit anderen Worten, was ist der Wert von $\lim\limits_{F\to E}|\Delta\boldsymbol{v}|$?
29. Beschreibe, wie Du die Beschleunigung des Mars im Punkt E herausfinden könntest.
30. Denke an die *Richtung* der Beschleunigung am Punkt E. Ist der Winkel zwischen dem Beschleunigungsvektor und dem Geschwindigkeitsvektor (platziert Fuß-zu-Fuß) *größer*, *kleiner* oder *gleich* $90°$?
31. Angenommen, der Mars startet aus dem *Ruhezustand* am Punkt E und bewegt sich mit zunehmender Geschwindigkeit dem Punkt F entgegen. Wie würdest Du die Beschleunigung am Punkt E herausfinden?
32. Beschreibe die Richtung der Beschleunigung des Mars beim Punkt E.

Energie akkumulieren: Stairway to Heaven



33. Meine Masse beträgt 70kg. Ich habe einen neuen Weg erfunden, Astronaut zu werden – indem ich auf eine ganz lange Leiter klettere, die bis ins All reicht, um der Schwerkraft der Erde in den Weltraum zu entkommen! Wie viel Energie benötige ich dafür? Für jede Stufe der Leiter muss ich eine kleine Menge Arbeit ΔW verrichten, und die Gesamtenergie, die ich brauche, um in den Weltraum zu entkommen, ist die Ansammlung *all* dieser winzigen Arbeitsbeiträge.

    Um jeden einzelnen Energiebeitrag zu berechnen, muss ich wissen, wie viel ich auf der jeweiligen Stufe wiege, wo ich mich in einer Entfernung r vom Erdmittelpunkt befinde. Das Gewicht ($\boldsymbol{F}_g$) einer Masse m im Abstand r vom Erdmittelpunkt ist eine Kraft des Betrags $F_g = GM_E m/r^2$, die auf den Erdmittelpunkt gerichtet ist. Hier ist $G = 6.67 \times$

$10^{-11}\mathrm{Nm}^2\mathrm{kg}^{-2}$ Newtons Gravitationskonstante und $M_E = 5.98 \times 10^{24}\mathrm{kg}$ ist die Masse des Erde. Berechne mit diesen Werten den gesamten (konstanten) Zähler der Gewichtsformel (GM_Em). **Wichtig:** *Deine Antworten auf solche Berechnungen müssen* *immer* *eine Zahl in* ***Standardform****, multipliziert mit den* ***physikalischen Einheiten****, enthalten!* $[2.792 \times 10^{16}\mathrm{Nm}^2]$

34. Verwende in der Gewichtsformel den Wert $R_E = 6371\ \mathrm{km}$ für den Erdradius, um zu bestätigen, dass mein Gewicht auf der Erdoberfläche vor dem Sprung knapp 700 N beträgt. Hinweis: Sie müssen diesen Radius zuerst von Kilometern in Meter umrechnen um unter Verwendung der Identität $1\ \mathrm{km} \equiv 10^3\ \mathrm{m}$. Zum Beispiel: $30\ \mathrm{km}$ entspricht $30 \times 10^3\ \mathrm{m}$, aber in der Standardform müssen wir die Zahl 30 durch eine Zahl zwischen 1 und 10 ersetzen, also:

$$\begin{aligned} 30\ \mathrm{km} &\equiv 30 \times 10^3\ \mathrm{m} \\ &\equiv 3 \times 10 \times 10^3\ \mathrm{m} \\ &\equiv 3 \times 10^4\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

35. Juhu! Unsere Gewichtsformel funktioniert! Du hast gezeigt, dass die Größe meines Gewichts an der Erdoberfläche:

$$\begin{aligned} F_g(R_E) &= \frac{GM_Em}{R_E{}^2} \\ &= \frac{2.792 \times 10^{16}\mathrm{Nm}^2}{(6.371 \times 10^6\ \mathrm{m})^2} \\ &= \frac{2.792 \times 10^{16}}{(6.371)^2 \times 10^{12}}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{m}^2} \\ &\approx 0.0688 \times 10^4\ \mathrm{N} \\ &\approx \underline{688\ \mathrm{N}} \end{aligned}$$

Nachdem wir überprüft haben, dass unsere Formel funktioniert, können wir jetzt die Größe meines Gewichts bei jedem Radius r vom Erdmittelpunkt berechnen:

$$F_g(r) = \frac{2.792 \times 10^{16}\mathrm{Nm}^2}{r^2} = (2.792 \times 10^{16}\mathrm{Nm}^2) \times r^{-2}$$

Berechne jetzt mein Gewicht $F_g(r)$ im Limes $r \to \infty$, wenn ich weit entfernt von der Erde bin.

36. Wie lautet die Formel für den Betrag $F_k(r)$ der Kraft, die ich aufbringen muss, um gegen die Schwerkraft zu steigen?
37. Okay, jetzt denke daran, dass wir wissen wollen, wie viel Arbeit ich verrichten muss, um meine Leiter ins All zu erklimmen. Angenommen, ich stehe bereits auf der Leiter im Radius r vom Erdmittelpunkt, also ist meine Steigkraft $F_k(r)$. Jetzt gehe ich eine Stufe der Leiter hinauf, und die Höhe dieser Stufe ist Δr, also muss ich in dieser Stufe (Kraft mal Strecke) Arbeit verrichten: $\Delta W = F_k(r) \cdot \Delta r$. Nachdem ich diesen Schritt gemacht habe, bin ich etwas höher, mein Gewicht hat sich also verändert und die Arbeit, die ich im nächsten Schritt verrichten muss, ist etwas weniger. Die Gesamtarbeit, die ich leisten muss, um in den Weltraum zu steigen, wird aus den Energiebeiträgen jeder einzelnen Stufe meiner Leiter zum Himmel akkumuliert:

$$\Delta W_\mathrm{k} = \sum \Delta W = [F_k(R_E) \cdot \Delta r] + [F_k(R_E + \Delta r) \cdot \Delta r] + [F_k(R_E + 2\Delta r) \cdot \Delta r] + \cdots$$

Wie viel Arbeit muss ich für den allerletzten Schritt in den Weltraum verrichten, wo r extrem groß ist?

38. Wir haben die Höhe jeder Stufe als Δr approximiert, aber natürlich ist Δr im Vergleich zur Länge meiner Leiter *extrem* winzig, also machen wir unsere Berechnung einfacher, indem wir die Höhe jeder Stufe auf fast null gehen lassen: $\Delta r \to 0$. Wir nennen diese Akkumulation von Beiträgen über viele, viele winziger Schritte ein ***Integral***:

$$\Delta W_{\text{esc}} = \lim_{\Delta r \to 0} \left[\sum_{R_E}^{\infty} \Delta W \right] = \int_{R_E}^{\infty} dW = \int_{R_E}^{\infty} F_k(r)\, dr$$
$$= (2.792 \times 10^{16} \text{Nm}^2) \cdot \int_{R_E}^{\infty} r^{-2}\, dr$$

Später in diesem Kurs lernen wir, dass $\int_{R_E}^{\infty} r^{-2}\, dr = [-1/r]_{R_E}^{\infty} = 1/R_E$, also:

$$\Delta W_{\text{esc}} = (2.792 \times 10^{16} \text{Nm}^2) \times 1/R_E = \frac{2.792 \times 10^{16} \text{Nm}^2}{R_E}$$

Berechne nun die ***Fluchtenergie*** ΔW_{esc}, die ich benötige, wenn ich ins All klettern will. [4335269188 Nm, oder ungefähr 4.335×10^9 Joules (= 4335 Megajoules)]

39. OK, jetzt wissen wir, wie viel Arbeit ich leisten muss, um ins All zu klettern. Aber nun angenommen, ich entscheide mich stattdessen in den Weltraum zu springen! Ich springe nämlich mit einem (sehr großen!) **Fluchttempo** v_{esc} nach oben, und dabei muss die kinetische (Bewegungs-)Energie dieser Geschwindigkeit mindestens so groß sein wie die soeben berechnete Fluchtenergie. Die Gleichung für die kinetische Energie ist $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$, also ist die minimale Sprungenergie, die ich benötige, um in den Weltraum zu entkommen, $E_{\text{kin}} = E_{\text{esc}} = 4.335 \times 10^9$ J. Drehe jetzt diese Gleichung um, um mein Fluchttempo zu berechnen: das Mindesttempo, mit dem ich springen muss, wenn ich der Erde ins All entkommen will.
40. Überprüfe in Wikipedia, ob Dein Wert für das Fluchttempo richtig ist. Wie lange würdest du brauchen, um mit diesem Tempo einmal um die Erde zu fliegen?

Konstruktionsübung: *Prüfungsvorbereitung*!

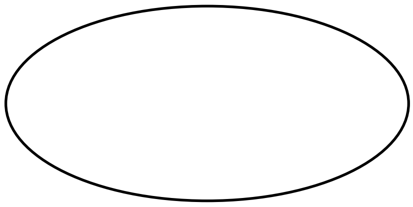
Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

A cyclist cycles round an elliptical track. She speeds up uniformly around the first lap from 0 km/h to a maximum speed, and then cycles at constant speed around the second lap. Sketch a plan view of each lap, drawing vectors to represent her changing acceleration.

Musterlösung:

Folgen

The plan view of the cycle track looks like this.



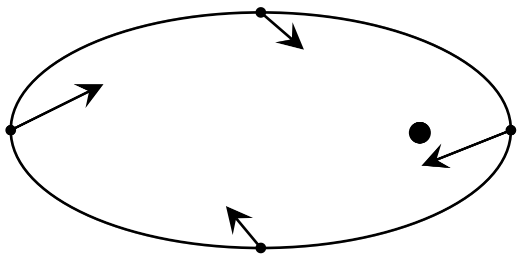
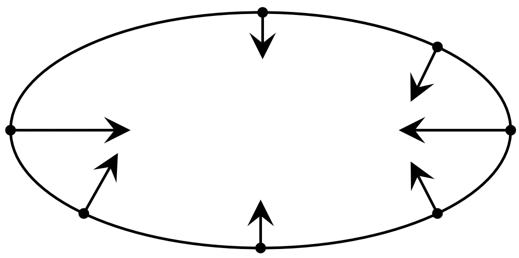
Engagieren

- If the speed is constant, the acceleration must not contain any component pointing along the track; therefore, the acceleration must point at right-angles to the track.
- Wherever the curvature of the track is greater, the acceleration component pointing at right-angles to the track must be greater.

Abstrahieren

- Select several different points that represent varying track curvatures.
- For each of these points on the track, draw an arrow. Pay particular attention to the component of acceleration along, and at right-angles to, the elliptical track.

Anwenden

First lap:	Second lap:
	

Ergebnis folgen

To check my diagram, I must alter the problem slightly to see if the diagram would still work. If I imagine the Sun at the black dot shown in the left diagram, arrows pointing towards it would indicate appropriate speeding up and slowing down of the Earth around the ellipse.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Sketch vectors to represent our cyclist's acceleration, if she rides round the following tracks:

First lap: speeding up uniformly	Second lap: cycling at *constant* speed