Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 03: Wie *beschreibt* Physik Veränderungen?

Zu diesem Kapitel steht auch ein Julia-Workshop zur Verfügung: **0103Composition.jl**

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

- Vektoren in 1- und 2-Dimensionen anwenden um Geschwindigkeit und Beschleunigung zu beschreiben mit sich änderndem Tempo und/oder Richtung.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

- ***Physik*** verwendet Mathematik, um unser Erleben zu beschreiben und zu erklären.
- ***Komposition*** ist eine Möglichkeit, mehrere Dinge zusammenzufassen, die wir als zusammengehörig erleben.

Threshold 5: Komposition

Eine ***Komposition*** ist eine Struktur, die mehrere verschiedene Komponenten enthält. Der menschliche Körper besteht aus verschiedenen Komponenten – Kopf, Körper, Knie usw. – die zusammen eine Struktur bilden: Jede Komponente muss an der richtigen Stelle sein, damit das Körpersystem richtig funktioniert. Eine Zelle besteht aus vielen chemischen Komponenten, und eine Reise nach Südosten setzt sich aus positiven Ostbewegungen und negativen Nordbewegungen zusammen. Wir können jeden Vektor mit Betrag und Richtung als eine Komposition aus Komponenten in verschiedene Achsenrichtungen beschreiben.

1. Vorm Spazierengehen stehe ich $3\mathrm{km}$ östlich und $4\mathrm{km}$ nördlich vom Dom – mein ***Ortsvektor*** ist also $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 3\mathrm{km} \\ 4\mathrm{km} \end{pmatrix}$. Ich laufe $5\mathrm{km}$ ostwärts und $2\mathrm{km}$ nordwärts – mein ***Verschiebungsvektor*** ist also $\Delta\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 5\mathrm{km} \\ 2\mathrm{km} \end{pmatrix}$. Mein *anschließender* Ortsvektor ist also:

$$\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 3\mathrm{km} \\ 4\mathrm{km} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\mathrm{km} \\ 2\mathrm{km} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\mathrm{km} \\ 6\mathrm{km} \end{pmatrix}$$

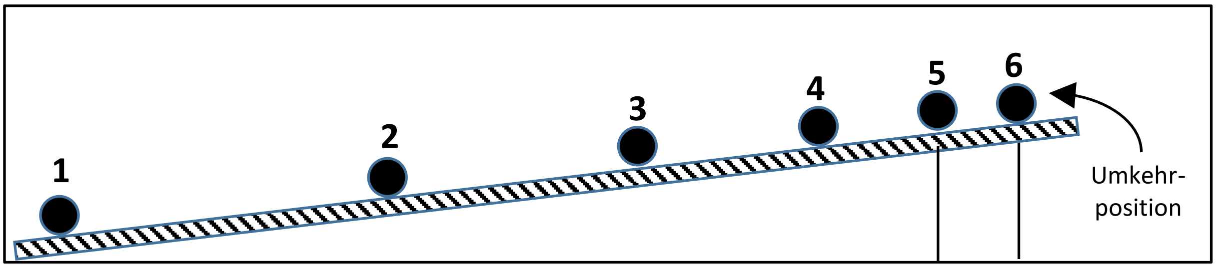
   Nach dem Spaziergang, wie viele Kilometer ist die *östlich* gerichtete ***Komponente*** meines Ortsvektors vom Dom aus? Wie lang ist die *nördlich* gerichtete Komponente?

2. In der G1-Phase vor der Mitose enthält eine Hefezelle 5 Einheiten des Proteins APC und 1 Einheit des Proteins S-CDK. Der gesamte ***Konzentrationsvektor*** ist somit $\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Um die Start-Phase der Mitose einzuleiten, benützt die Zelle einen chemischen ***Reaktionsvektor*** $\Delta\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$, der die APC-Konzentration um 4 Einheiten *vermindert* und die S-CDK-Konzentration um 5 Einheiten *erhöht*. Was sind die zwei Komponenten g_1 und g_2 des Reaktionsvektors $\Delta\boldsymbol{G}$?

Beschleunigung in <u>einer</u> Dimension

Beschleunigung kann das Tempo *vermindern!*

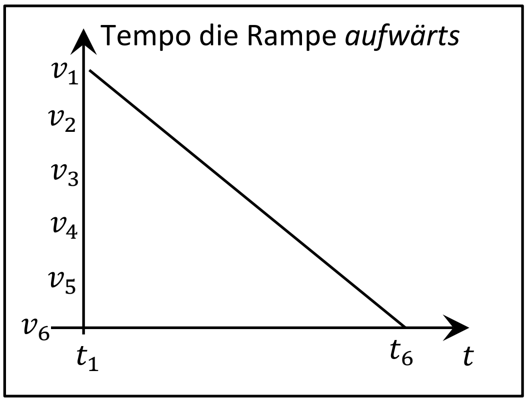
In diesem Diagramm siehst Du eine durch gleiche Zeitintervalle getrennte Folge von Bildern einer Kugel, die eine Rampe <u>*hoch*</u>rollt:



3. Zeichne an jeder der beschrifteten Positionen im obigen Diagramm einen Pfeil, der an der Kugel befestigt ist, um ihren momentanen Geschwindigkeitsvektor zu diesem Zeitpunkt darzustellen. Falls die Geschwindigkeit an irgendeinem Punkt Null ist, markiere diese Information im Diagramm.

Du hast gerade ein Geschwindigkeitsdiagramm gezeichnet. Es zeigt die Position und Geschwindigkeit eines Objekts zu Zeitpunkten an, die durch gleiche Zeitintervalle getrennt sind.

4. Vergleiche im Bereich rechts die Geschwindigkeiten an den Punkten 1 und 2, indem Du die Vektoren zeichnest, die diese Geschwindigkeiten darstellen. Zeichne die Vektoren nebeneinander, mit ihren Füßen auf gleicher Höhe und beschrifte dann die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$ bzw. $\boldsymbol{v}_2$.
5. Zeichne und beschrifte den Vektor $\Delta\boldsymbol{v}$, den wir der früheren Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_1$ hinzuaddieren müssten, um die spätere Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_2$ zu bekommen.
6. Wieso ist „Geschwindigkeitsänderung“ ein guter Name für diesen Vektor $\Delta\boldsymbol{v}$?
7. Wie verhält sich die *Richtung* des Geschwindigkeitsänderungs-Vektors $\Delta\boldsymbol{v}$ zur Richtung der beiden Geschwindigkeitsvektoren?
8. Wäre Deine Antwort anders, wenn wir stattdessen vom Geschwindigkeitsänderungs-Vektor $\Delta\boldsymbol{v}$ zwischen den beiden anderen Punkten 3 und 4 sprechen würden?
9. Schaue Dir das v/t-Diagramm rechts an. ***Tempo*** v (*kein* Fettdruck!) ist der Betrag des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}$ (*mit* Fettdruck!). Ich habe die positive Geschwindigkeitsrichtung so gewählt, dass sie die Rampe *nach oben* zeigt. Wie verhält sich der *Betrag* des Geschwindigkeitsänderungs-Vektors $\Delta\boldsymbol{v}$ zwischen den Punkten 1 und 2 im Vergleich zum Geschwindigkeitsänderungs-Vektor $\Delta\boldsymbol{v}$ zwischen den Punkten 3 und 4? Erkläre Deine Antwort.

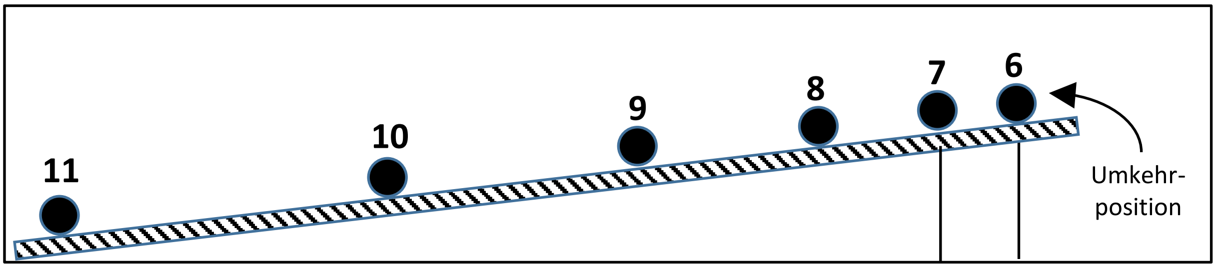


10. Denke nun an den Geschwindigkeitsänderungs-Vektor $\Delta\boldsymbol{v}$ zwischen den zwei Punkten 1 und 4 im Geschwindigkeitsdiagramm, die nicht nebeneinander liegen. Ändert dies die *Richtung* von $\Delta\boldsymbol{v}$? Ändert es den Betrag von $\Delta\boldsymbol{v}$? Wenn ja, wie viel Mal ist es größer oder kleiner als $\Delta\boldsymbol{v}$ für zwei nebeneinander liegende Punkte?

11. Die Definition von Beschleunigung ist $\boldsymbol{a} \equiv \Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$. Zeichne neben Deiner obigen Skizze von $\Delta\boldsymbol{v}$ zwischen den Punkten 1 und 2 einen Vektor, der die Beschleunigung des Balls zwischen denselben Punkten 1 und 2 darstellt. Wie hängt die Richtung von $\boldsymbol{a}$ mit der Richtung von $\Delta\boldsymbol{v}$ zusammen?
12. Ist die Beschleunigung davon abhängig, ob Du sie zwischen den Punkten 1 und 2, zwischen den Punkten 3 und 4 oder zwischen den Punkten 1 und 4 misst?
13. Verallgemeinere jetzt Deine bisherigen Ergebnisse: Wie ist der Zusammenhang zwischen den Richtungen der Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ und der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ für einen Ball, der sich geradlinig bewegt und langsamer wird?

Beschleunigung kann das Tempo *erhöhen!*

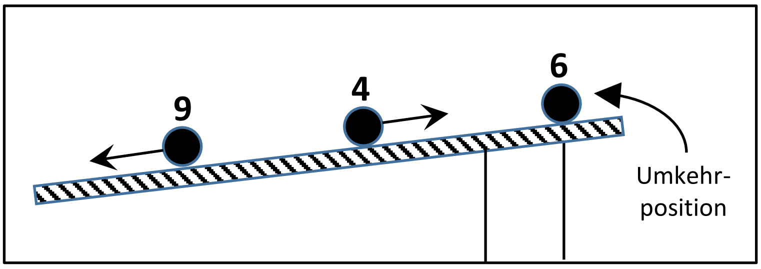
Dieses Diagramm zeigt eine Folge von Bildern einer Kugel, die eine Rampe *herunter*rollt:



14. Skizziere rechts die Geschwindigkeitsvektoren, die den Punkten 8 und 9 entsprechen. Zeichnen Sie die Vektoren nebeneinander, mit ihren Enden auf gleicher Höhe, und beschriften Sie dann die Vektoren $\boldsymbol{v}_8$ bzw. $\boldsymbol{v}_9$. Dann zeichne und beschrifte den Vektor $\Delta\boldsymbol{v}$, den wir zur früheren Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_8$ addieren würden, um der späteren Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_9$ zu entsprechen.
15. Welche Beziehung besteht zwischen den Richtungen von $\Delta\boldsymbol{v}$ und den beiden Geschwindigkeitsvektoren? Wäre Deine Antwort anders gewesen, wenn wir zwei andere Punkte gewählt hätten, bei denen die Kugel die Rampe hinunter schneller werden würde?
16. Zeichne nun in denselben Bereich den Beschleunigungsvektor $\boldsymbol{a}$ für die Kugel, während sie schneller wird. Wie hängt ihre Richtung mit der Richtung der Geschwindigkeitsänderung $\Delta\boldsymbol{v}$ zusammen?

Beschleunigung kann die Geschwindigkeits*richtung ändern!*

Dieses Geschwindigkeitsdiagramm enthält den Moment, in dem die Kugel sich umdreht (Punkt 6):



17. Skizziere im leeren Bereich unten die Geschwindigkeitsvektor-en entsprechend den Punkten 4 und 9 und beschrifte sie mit $\boldsymbol{v}_4$ and $\boldsymbol{v}_9$. Dann zeichne und beschrifte den Vektor $\Delta\boldsymbol{v}$, den wir zur früheren Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_4$ addieren müssten, um die spätere Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_9$ zu bekommen.

18. Welche Beziehung besteht zwischen den Richtungen von $\Delta\boldsymbol{v}$ und den beiden Geschwindigkeitsvektoren? Ist „Geschwindigkeitsänderung“ immer noch ein guter Name für $\Delta\boldsymbol{v}$?
19. Zeichne einen Vektor, der die Beschleunigung der Kugel $\boldsymbol{a} \equiv \Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$ zwischen den Punkten 4 und 9 darstellt. Welche Beziehung besteht zwischen dieser neuen Beschleunigungsrichtung und der Beschleunigungsrichtung vorher, als der Ball die Rampe hoch- oder runterrollte?

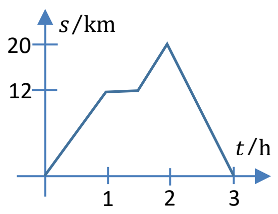
Ressourcen: <u>Überfliege</u> diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

[*s/t Graphen: Höhe = Verschiebung; Steigung = Geschwindigkeit*]

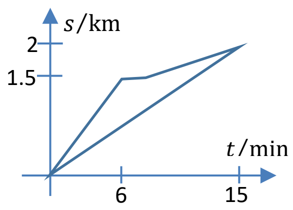
Verschiebung-Zeit (oder s/t) Graphen beschreiben Bewegung und Änderung aller Arten: *Je steiler der Graph desto schneller die Bewegung oder Änderung*.

Beispiel – Der *s/t* Graph rechts zeigt die Fahrradtour eines Radlers über 3 Stunden. Beschreibe diese Bewegung.

Fahrradtour (*s/t*):



Joggerin und Läufer (*s/t*):



A. Der Radler startet aus dem Ruhezustand (wenn $t = 0\ \mathrm{s}$, $s = 0\ \mathrm{km}$).
B. Fährt 12 km über 1 Stunde mit Geschwindigkeit $12\ \mathrm{km\ h^{-1}}$.
C. Macht eine halbe Stunde Pause ($v = 0\ \mathrm{km\ h^{-1}}$).
D. Fährt 8 km in einer halben Stunde mit Geschwindigkeit $v = 16\ \mathrm{km\ h^{-1}}$.
E. Kehrt zurück zum Anfang: fährt 20 km in 1 Stunde mit Geschwindigkeit $v = -20\ \mathrm{km\ h^{-1}}$ (sprich: $20\ \mathrm{km\ h^{-1}}$ in die umgekehrte Richtung). ■

Beispiel – Eine Frau und ein Mann starten beide von derselben Anfangsposition. Die Frau joggt 2 km in 15 Minuten und der Mann läuft 1.5 km in 6 Minuten, macht 1 min Pause, dann geht die letzten 0.5 km in 8 min. Plotte diese zwei Verläufe in einem *s/t* Graph.

Frau: konstante Geschwindigkeit, also eine Gerade von $(0{,}0)$ bis $(15{,}2)$.

Mann: Verlauf hat drei Phasen, also drei Geraden: A (laufen), B (Pause) und C (gehen). Siehe *s/t* Graph rechts. ■

Die Steigung eines Verschiebung-Zeit-Graphs ist die Geschwindigkeit

Geschwindigkeit des heimkehrenden Radlers ist $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{-20\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{h}} = -20\ \mathrm{km\ h^{-1}}$

Geschwindigkeit der Joggerin ist $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\ \mathrm{km}}{15\ \mathrm{min}} = \frac{2\ \mathrm{km}}{0.25\ \mathrm{h}} = 8\ \mathrm{km\ h^{-1}}$

Freier Fall bedeutet, dass nur Schwerkraft wirkt und sonst nichts

Die Beschleunigung des Ziegelsteins im vorigen Beispiel war $9.8\ \mathrm{ms^{-2}}$ *nach unten*: *Beschleunigung hat also eine Richtung*. Beschleunigung ist ein Beispiel für **Vektoren**: sie hat Betrag *und* Richtung. Wir schreiben Vektoren im **Fettdruck**.

Zum Beispiel erlebt ein Objekt im **freien Fall** wie unser Ziegelstein nur eine einzige Kraft – sein zum Boden hin gerichtetes Gewicht. Sein Gewicht bewirkt auf das Objekt eine Beschleunigung $\mathbf{g} \equiv 9.8\ \mathrm{ms^{-2}}(zum\ Boden)$, und zusammen mit dem Betrag müssen wir immer diese Richtung mit angeben.

Wir können uns die Mühe sparen, diese Richtung immer zu erwähnen, indem wir bestimmen, dass nach oben die positive Richtung ist. Somit ist die vertikale Komponente der Erdbeschleunigung immer negativ: $g \equiv -9.8\ \mathrm{ms^{-2}}$. Diese Komponente ist *kein* Vektor, und wird deswegen nicht in Fettdruck geschrieben!

Galileo: Die drei Konstante-Beschleunigungsgleichungen

In diesen Gleichungen ist *t* die Zeit, u das Anfangstempo (bei $t = 0$), $s(t)$ die Verschiebung, $v(t)$ das momentane Tempo, a die (konstante) Beschleunigung:

1. $v = u + at$ (also steigt Geschwindigkeit linear über Zeit);
2. $(s - s_0) = ut + \frac{1}{2}at^2$ (also steigt Verschiebung quadratisch über Zeit);
3. $v^2 = u^2 + 2as$ (Geschwindigkeit steigt als die Wurzel der Verschiebung).

Galileo entwickelte die konstanten Beschleunigungsgleichungen ungefähr 1600 CE; deswegen heißen sie auch **Galileos kinematische Gleichungen**.

Galileo bewies, dass **g** die Erdbeschleunigung eines jeden Objekts in der Nähe des Bodens ist. Er stand berühmterweise 1589 auf dem Turm von Pisa und ließ eine schwere und eine leichte Kugel gleichzeitig zum Boden fallen; beide kamen zum selben Zeitpunkt unten an. *Bravo Galileo!*

Im freien Fall ersetzen wir einfach a durch g

Da beim freien Fall die Beschleunigung konstant ist, können wir in Galileos Gleichungen *a* einfach durch *g* ersetzen. Drei interessante Fälle tauchen auf:

a) Keine Anfangsgeschwindigkeit: $u = 0\ \mathrm{ms}^{-1}$ (Objekt fällt einfach nach unten). Galileos Gleichungen lauten dann: $v = gt;\quad s = \frac{1}{2}gt^2;\quad v^2 = 2gs.$
b) Anfangsgeschwindigkeit ist nicht null (Objekt wird geworfen): $v = u + gt;\quad s = ut + \frac{1}{2}gt^2;\quad v^2 = u^2 + 2gs.$
c) Anfangshöhe (σ) ist nicht null (Werfer steht auf Hügel oder im Loch): $v = u + gt;\quad s = \sigma + ut + \frac{1}{2}gt^2;\quad v^2 = u^2 + 2g(s - \sigma).$

Beispiel – Kristin wirft von der Klippe einen Stein mit 2 ms^{-1} senkrecht zum Wasser hinunter. Nach 3 s platscht es. Wie hoch ist die Klippe?

♠ Wähle Fall b: $g = -9.8\ \mathrm{ms}^{-2}$, $u = -2\ \mathrm{ms}^{-1}$, $t = 3\ \mathrm{s}$, $s = ?$
♥ Gleichung 2 ergibt *s* aus *g*, *u* und *t*: $s = ut + \frac{1}{2}gt^2$.
♣ Setze Werte ein: $s = -2\ \mathrm{ms}^{-1} \times 3\ \mathrm{s} - \frac{1}{2} \times 9.8\ \mathrm{ms}^{-2} \times (3\ \mathrm{s})^2 = -50.15\ \mathrm{m}.$
♦ Klippe ist 50.15 m high. Plausibel? ■

Der Clou: Wir behandeln horizontale und vertikale Bewegung getrennt

Beispiel – Beim Rock'n'Roll schleudert Kristin ihren Tanzpartner mit 10 ms^{-1} horizontal aus einer Höhe von 1.5 m. Wie lang und wie weit fliegt er?

♠ Fall 3! Erstmal vertikal: $g_z = -9.8\ \mathrm{ms}^{-2}$, $u_z = 0$, $t = ?$, $\sigma_z = 1.5\ \mathrm{m}$, $s_z = 0$.
♥ $s_z = \sigma_z + u_z t + \frac{1}{2}g_z t^2$.
♣ $t^2 = 2 \times 1.5\ \mathrm{m}/9.8\ \mathrm{ms}^{-2} = 0.306\ \mathrm{s}^2$.
♦ Tanzpartner fliegt $\sqrt{0.306\ \mathrm{s}^2} = 0.553$ s lang: Wie weit fliegt er in dieser Zeit?

♠ Fall 2! Jetzt horizontal: $a_x = 0$, $u_x = 10\ \mathrm{ms}^{-1}$, $t = 0.553\ \mathrm{s}$, $\sigma_z = 0\ \mathrm{m}$, $s_x = ?$
♥ $s_x = u_x t + \frac{1}{2}a_x t^2$.
♣ $s_x = 10\ \mathrm{ms}^{-1} \times 0.553\ \mathrm{s} = 5.53\ \mathrm{m}$. Tanzpartner fliegt also 5.53 m.
♦ Kristin ist ganz schön kräftig. Aber die Angabe 10 ms^{-1} ist auch etwas suspekt! ■

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt *gemeinsam*!

Komposition

20. When I paddle my canoe in the river, I paddle with a speed $3\,\mathrm{km/h}$ eastwards and $4\,\mathrm{km/h}$ northwards; that is, my ***paddle velocity*** is $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 3\mathrm{km} \\ 4\mathrm{km} \end{pmatrix}$. Simultaneously, the river current flows with a speed $5\,\mathrm{km/h}$ eastwards and $2\,\mathrm{km/h}$ northwards; that is, the ***flow velocity*** is $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 5\mathrm{km} \\ 2\mathrm{km} \end{pmatrix}$. So my total ***ground velocity*** is $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3\,\mathrm{km/h} \\ 4\,\mathrm{km/h} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\,\mathrm{km/h} \\ 2\,\mathrm{km/h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\,\mathrm{km/h} \\ 6\,\mathrm{km/h} \end{pmatrix}$. How fast is the *east-pointing component* of my total ground velocity? How fast is the *north-pointing component* of my total ground velocity?
21. Think of a vector in the 2-dimensional xy-plane as an arrow pointing outwards in some direction from the origin. The ***x-component*** is the arrow's shadow projected vertically onto the ground (the x-axis), and the ***y-component*** is the arrow's shadow projected horizontally onto a wall (the y-axis). Find a direction of the arrow that would have a ground projection (x-component) of zero. Where must the sun be, to cast this shadow?
22. Find an arrow direction that has a wall projection (y-component) of zero. Where must the sun be, to cast this shadow?
23. What arrow direction has an x-component that is *exactly* as long as the arrow itself?
24. What arrow direction has a y-component *exactly* as long as the arrow itself?
25. What angle must the arrow make with the ground to have an x-component that is *exactly half* the length of the arrow itself?
26. What must the arrow do to have an x-component that grows to a maximum rightwards, then shrinks to zero, then grows to a maximum leftwards, then shrinks to zero and grows rightwards again?
27. Direction is *extremely* important when we are working with vectors. Suppose your spaceship is moving with a *right-pointing* velocity. In what direction must its ion-drive push the spaceship, in order to *increase* its speed?
28. In what direction must your ion-drive push the spaceship, to *decrease* its speed?
29. Now suppose your spaceship's velocity is pointing *leftwards*. In what direction must your ion-drive push the spaceship, in order to *increase* its speed?
30. In what direction must your ion-drive push the spaceship, to *decrease* its speed?
31. Now suppose your spaceship's velocity is again pointing *rightwards*. In what direction must your ion-drive push the spaceship if you want to *leave its speed completely unchanged*?
32. How would your spaceship behave if you did this?
33. How would your ion-drive need to push in order to make your spaceship fly round and round in a circle at a constant speed?
34. What name would you give to the point that the ion-drive is pushing towards?
35. What name would you give to an ion-drive force that acts in this way?

Kinematics

36. Übersetze Galileos Gleichungen zur Vektor-Form anhand der Vektoren $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ and $\boldsymbol{a}$.
37. Was ist die vertikale Anfangsgeschwindigkeit eines Balls, der mit $5\,\mathrm{ms}^{-1}$ horizontal geworfen wird?
38. Leite Galileos Gleichung $v^2 = u^2 + 2as$ aus den anderen zwei her.
39. Wie ändert sich durch Zeit die horizontale Geschwindigkeit eines frei fallenden Steins?

40. Eine Läuferin beschleunigt sich aus dem Ruhezustand mit $0.5\ \mathrm{ms^{-2}}$ über 5 s. Sie läuft dann mit konstanter Geschwindigkeit für 20 s und verlangsamt sich dann zum Stillstand mit $0.25\ \mathrm{ms^{-2}}$. Zeichne einen *v/t* Graph ihrer Bewegung und berechne die Länge ihres Laufs.
41. Eine Fallschirmspringerin springt aus einem horizontal fliegenden Flugzeug und wird 5 Sekunden lang von der Schwerkraft beschleunigt. Berechne ihre maximale Fallgeschwindigkeit und ihre Fallstrecke während dieser Zeit.
42. Ein Motorradfahrer bremst gleichmäßig vor einer Verkehrsampel. Er braucht 3.2 s um über eine Strecke von 40 m zum Stillstand zu kommen. Was war seine Anfangsgeschwindigkeit? Was ist seine Bremsrate?
43. Ein Kanute paddelt sein Kajak flussaufwärts mit konstanter Geschwindigkeit um ein Wehr zu entkommen; 12 m flussaufwärts vom Wehr hört er vor Erschöpfung auf zu paddeln und treibt weiter. Der Fluss beschleunigt ihn zum Wehr mit konstantem Wert $6\ \mathrm{ms^{-2}}$, bis er mit $13\ \mathrm{ms^{-1}}$ über das Wehr getrieben wird. Was war seine Anfangsgeschwindigkeit und was ist die maximale Entfernung vom Wehr, die er erreicht?
44. Ryan steht auf einer 560 m hohen Klippe und wirft einen Stein mit $20\ \mathrm{ms^{-1}}$ horizontal ins Meer hinunter. Wie lang dauert der Flug des Steins bis zum Meer? Wie weit von Klippe entfernt fällt er ins Wasser?
45. Kristin schleudert einen Stein in die Luft mit vertikaler Geschwindigkeit $30\ \mathrm{ms^{-1}}$ und horizontaler Geschwindigkeit $20\ \mathrm{ms^{-1}}$ aus 1 m Höhe über dem Boden. Finde die maximale Flughöhe und Reichweite des Steins.

Numerische Ergebnisse

37: [0 m/s]

39: [0 m/s]

41: [$-49.05\ \mathrm{ms^{-1}}$; $-122.625\ \mathrm{m}$]

42: [$25\ \mathrm{ms^{-1}}$; $-7.8\ \mathrm{ms^{-2}}$]

44: [11 s; 214 m]

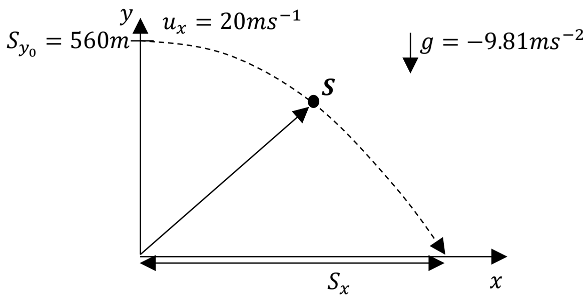
45: [47 m; 124 m]

Konstruktionsübung: *Prüfungsvorbereitung*!

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Ryan steht auf einer 560 m hohen Klippe und wirft einen Stein mit $20\ \mathrm{ms^{-1}}$ horizontal ins Meer hinunter. Wie lang dauert der Flug des Steins bis zum Meer? Wie weit von der Klippe entfernt fällt der Stein ins Wasser?

Musterlösung:



Folgen

Da die x, y-Achsen in der Natur nicht existieren, dürfen wir sie frei wählen. Wir wählen als Ursprung den Punkt, an dem sich Klippe und Meeresspiegel treffen. Dies hat den Vorteil, dass wir keine negativen Werte bekommen werden.

Engagieren

Für diese Aufgabe benötigen wir die Galileo Gleichungen. Mit der Galileo-2 in y-Richtung können wir die Flugdauer des Steins berechnen. Dieses Ergebnis setzen wir dann in Galileo-2 in x-Richtung ein, um die zurückgelegte Strecke zu ermitteln.

Abstrahieren

- Stelle Galileo-2 in y-Richtung auf und berechne t.
- Stelle Galileo-2 in x-Richtung auf und setzte t ein.

Anwenden

- Da wir die y-Achse so gewählt haben, dass sie nach oben zeigt, ist die Erdbeschleunigung nach unten gerichtet ($a_y = -g$). Daraus ergibt sich für Galileo-2:

$$
\begin{aligned}
& (S_y - S_{y_0}) = u_y t + \frac{1}{2}(-g)t^2 \\
\Longrightarrow \quad & 0\mathrm{m} - 560\mathrm{m} = 0 + \frac{1}{2}(-9.81\mathrm{ms}^{-2})t^2 \\
\Longrightarrow \quad & -560\mathrm{m} = -4.905\mathrm{ms}^{-2} \cdot t^2 \\
\Longrightarrow \quad & t^2 = 114.1692151\mathrm{s}^2 \\
\Longrightarrow \quad & \underline{t = 10.685\ \mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

- Die x-Beschleunigung ist null, also ergibt Galileo-2:

$$(S_x - S_{x_0}) = u_x t + \frac{1}{2}a_x t^2 = 20\mathrm{ms}^{-1} \cdot 10.685\ \mathrm{s} = \underline{213.7\ \mathrm{m}}$$

Ergebnis folgen

Die Zeit, die der Stein braucht, um auf das Meer zu treffen, sowie der zurückgelegte Weg sind vernünftig, wenn man bedenkt, dass er geworfen wurde – und dass die Klippe sehr hoch ist! Hätte Ryan den Stein einfach losgelassen, dann wäre ein kürzerer Abstand zu erwarten. Ebenso gehen die Einheitsberechnungen auf, was immer ein gutes Zeichen ist.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Kristin schleudert einen Stein in die Luft mit vertikaler Geschwindigkeit $30\ \mathrm{ms}^{-1}$ und horizontaler Geschwindigkeit $20\ \mathrm{ms}^{-1}$ aus 1 m Höhe über dem Boden. Finde die Reichweite und maximale Flughöhe des Steins.