Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 07: Wie verwandeln wir Physik in Mathematik?

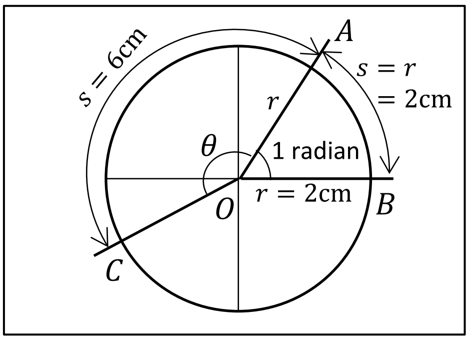
ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

- Zwischen Bogenmaß und Grad als Winkelmaß übersetzen;
- Trigonometrische Funktionen anwenden, um Vektoren auf Achsen zu projizieren;
- Trigonometrie anwenden, um Eigenschaften von Dreiecken zu berechnen;
- Trigonometrische Funktionen $\sin(\,)$, $\cos(\,)$ und $\tan(\,)$ grafisch beschreiben;
- Trigonometrische Funktion der Standardwinkeln ($0\ [0°]$, $\frac{\pi}{6}\ [30°]$, $\frac{\pi}{4}\ [45°]$, $\frac{\pi}{3}\ [60°]$, $\frac{\pi}{2}\ [90°]$) berechnen.

Dekonstruieren: <u>Bearbeite</u> diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

Was ist ein Radiant?

Neben Grad gibt es eine weitere nützliche Möglichkeit, Winkel zu messen – das *Bogenmaß*. Ein ***Radiant*** ist der Winkel in der Mitte von *jedem* Kreis, der von einer Bogenlänge gleich einem Radius zwischen zwei Radien aufgespannt ist. In der Abbildung rechts beträgt der Winkel $\widehat{AOB}$ einen Radianten.



1. Schätze anhand dieses Diagramms ab, wie viel Grad Deiner Meinung nach ein Radiant beträgt?
2. Die Bogenlänge s trennt die beiden Punkte A and C auf dem Kreisumfang und θ ist der Winkel zwischen den beiden Radien $\overline{OA}$ and $\overline{OC}$. Wievielmal größer ist der Bogen $\overset{\frown}{AC}$ als der Bogen $\overset{\frown}{AB}$?
3. Wievielmal größer ist der Winkel θ als 1 Radiant? (Tipp: Schaue die Bogenlängen an!)
4. Was ist also der Wert des Winkels θ in Radianten?
5. Stelle Dir jetzt vor, dies wäre ein allgemeiner Kreis, für den wir keinen Zahlenwert für r or s wüssten. Schreibe einen mathematischen Ausdruck für den Winkel θ im Bogenmaß auf.
6. Benütze Deine Formel aus der vorigen Aufgabe um die physikalische Einheit vom Bogenmaß zu berechnen.
7. Beweise, dass: $\pi = 180°$.

Fazit: *Ein Radiant ist etwas unterhalb von $60°$ (also $57.1°$) und π ist eine halbe Umdrehung*.

Du darfst ruhig diese halbe Umdrehung 180 Grad nennen, wenn Du möchtest, aber glaube mir: Je schneller Du lernst mit Radianten umzugehen, desto besser wirst Du Mathematik von jetzt an verstehen. *Wir benützen hier in der Mathematik einfach keinen Grad, sondern nur Radianten!*

Trigonometrische Funktionen (Sinus, Kosinus und Tangens)

SOHCAHTOA ist eine Eselsbrücke, die Schüler im englischsprachigen Raum für die Trig-Funktionen (Sinus, Kosinus, usw.) verwenden. Die Bedeutung ist:

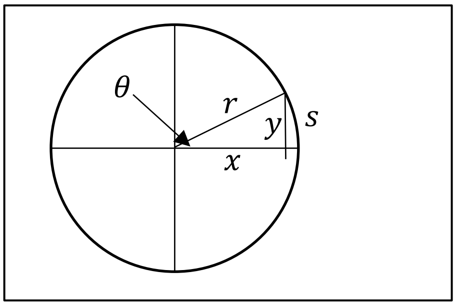
SOH: $\sin\theta = \frac{opposite}{hypotenuse}$; CAH: $\cos\theta = \frac{adjacent}{hypotenuse}$; TOA: $\tan\theta = \frac{opposite}{adjacent}$.

In Deutsch würde es also SGHKAHTGA heißen:

SGH: $\sin\theta = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$; KAH: $\cos\theta = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$; TGA: $\tan\theta = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$.

Also frage ich Dich: Wie spricht man eigentlich SGHKAHTGA aus? Falls Du diese Aussprache beherrschst, ist Dir diese deutsche Version vielleicht nützlich; sonst schlage ich vor, dass Du stattdessen die englische Version SOHCAHTOA verwendest.

(Ist das nicht irgendwie ein Vulkan im Pazifik?!)



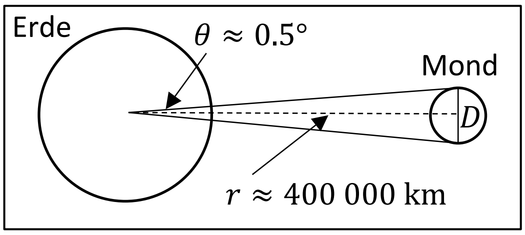
Welchen Nutzen hat Bogenmaß?

Siehe das Diagramm rechts an. Der Radius des Kreises ist r, und wir sehen ein rechtwinkliges Dreieck mit Höhe y, Basis x und Hypotenuse r. θ ist der Winkel unten links in diesem Dreieck, und laut der Definition vom Bogenmaß gilt auch: $\theta = s/r$.

8. Schreibe einen Ausdruck für $\sin\theta$ auf.
9. Überzeuge jemanden, dass $\lim\limits_{\theta\to 0}[y] = s$.
10. Benütze dieses Ergebnis, um jemanden davon zu überzeugen, dass $\lim\limits_{\theta\to 0}[\sin\theta] = \theta$.

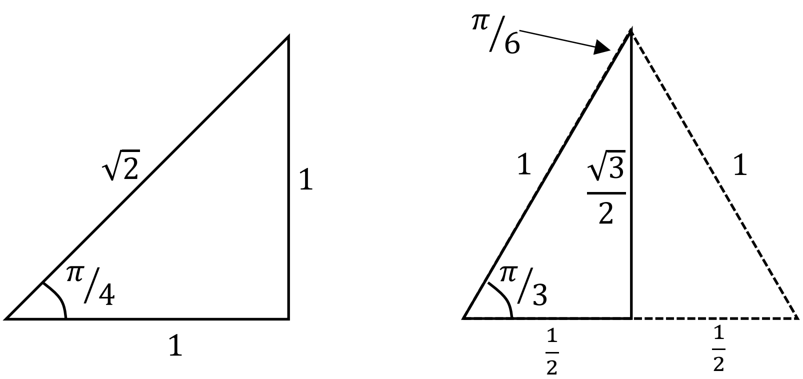
Dieses Ergebnis – dass $\theta \approx \sin\theta$ für kleine Winkeln – ist *unglaublich nützlich*! Tatsächlich ist es der Fall, dass für kleine Winkeln ($\theta < 10°$), θ eine *sehr gute* Approximation für $\sin\theta$ and $\tan\theta$ ist. Zum Beispiel:

11. Berechne $\sin(1{,}8°)$ *ohne* Taschenrechner.
12. Der mittlere Abstand des Mondes von der Erde ist 4×10^5 km, und die Winkelbreite des Mondes von der Erde ist etwa 0,57°. Welchen Durchmesser hat der Mond?



Was sind die einfachsten Trig-Werte?

Für die Prüfung ist es sehr wichtig, die Trig-Werte aller Hauptwinkel 0°, 30°, 45°, 60°, and 90° (und deren Rotation durch die weiteren Quadranten) sofort im Kopf parat zu haben. Um diese in der Prüfung schnell zu berechnen, skizziere einfach diese Dreiecke auf Schmierpapier:



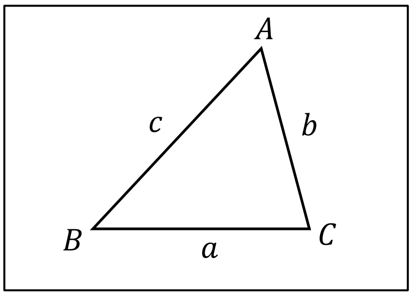
13. Benütze diese Diagramme um den Wert von $\sin 30°$, $\cos\frac{\pi}{4}$ und $\tan\frac{\pi}{3}$ zu berechnen.

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

- Radianten sind unser Maßstab für Winkel
- Wir können konvertieren zwischen Radianten und Grad …
- … aber Radianten sind später unheimlich viel einfacher!
- cos(θ), sin(θ) sind Boden- (x) und Wand- Projektion (y) eines Pfeils
- Diese Definition ist gleichbedeutend mit den SOHCAHTOA-Definitionen
- Aus dieser Kreisdefinition folgen die Graphen von Sinus, …
- … Kosinus und Tangenz
- Sinus- und Kosinus-Funktionen haben viele nützliche Symmetrien
- Diese führen wiederum zu neuen Symmetrien der Tangenz-Funktion
- Der Einheitskreis schenkt uns Werte für sin, cos und tan der Hauptwinkel
- Pythagoras ist eine Aussage über trigonometrische Funktionen

Wir können auch die Winkeln und Seiten eines Dreiecks berechnen

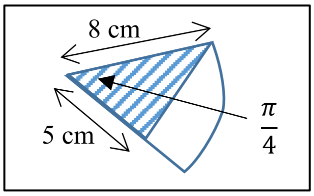
- Sinus-Regel : $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
- Kosinus-Regel : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$



Konstruktion: *Gemeinsam* bearbeiten!

14. Wie viele Radianten sind im ganzen Kreis? In einem rechten Winkel?
15. Was ist $\tan x$ in Bezug auf $\cos x$ und $\sin x$? Was ist $\cos^2 x$ in Bezug auf $\sin^2 x$?
16. Zeichne ein Dreieck ΔXYZ mit Seitenlängen x, y, z . Schreibe die Sinus- und Kosinus-Regel für dieses Dreieck hin. Gib einen Ausdruck für dessen Fläche an.
17. Bestimme auf zwei Dezimalstellen genau die Dreiecke … (a) ΔABC, wobei $A = 30°$, $C = 25°$ und $b = 6$ m (und berechne Fläche); (b) ΔPQR, wobei $p = 3$ km, $q = 23$ km und $R = 10°$.
18. Was sind die drei Winkel eines dreieckigen Schrebergartens mit Seitenlängen 10 m, 20 m und 25 m?
19. Schreibe *genaue* (Hinweis!) Werte für folgende Ausdrücke auf: $\cos 30°$, $\sin 30°$, $\tan 30°$, $\cos 45°$, $\sin 45°$, $\tan 45°$, $\cos 60°$, $\sin 60°$, $\tan 60°$.
20. Skizziere Graphen für die drei Funktionen $\sin x$, $\cos x$ und $\tan x$. Beschrifte alle Maximen, Minimen, Null- und undefinierten Stellen.
21. Skizziere folgende Graphen: (a) $y = \frac{1}{2}\cos x$ $(0° \le x \le 360°)$; (b) $y = \sin(x + 30°)$ $(0° \le x \le 360°)$; (c) $y = \tan 3x$ $(0° \le x \le 180°)$.
22. Löse jede dieser Gleichungen unter der Bedingung $0° \le \theta \le 360°$: (a) $\sin\theta = -\sqrt{3}/2$; (b) $\tan\theta = -1$; (c) $\cos\theta = -1/\sqrt{2}$.
23. Löse jede dieser Gleichungen unter der Bedingung $-180° \le \theta \le 180°$: (a) $\cos 4\theta = -2/3$; (b) $\sin(\theta + 35°) = 0.3$; (c) $\tan\frac{1}{2}\theta = 500$.
24. Finde alle Lösungen der Gleichung $6\sin^2 x = \cos x + 5$ im Bereich $0° \le x \le 360°$.
25. Löse $3\tan x + 2\cos x = 0$ im Bereich $-90° \le x \le 90°$.
26. Vereinfache: $(\sin y + \cos y)^2 + (\cos y - \sin y)^2$.
27. Beweise, dass $\frac{\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x - 1} \equiv -1$.
28. Wie viele Dreiecke ΔABC findest Du, bei denen gilt: $a = 3$, $b = 5$, $A = 35°$? (*Diagramm!*)

29. Anton und Bea laufen in unterschiedliche Richtungen von derselben Ausgangsposition aus: Anton läuft 150 m südwärts; Bea läuft 250 m mit Kompasspeilung $100°$. Was ist dann der Abstand zwischen den zwei? Zeige, dass Beas Kompasspeilung ϑ von Anton aus diese Gleichung erfüllt: $\frac{\sin\theta}{\sin 80°} = 0.93$ (auf 2 Dezimalstellen Genauigkeit). (*Diagramm!*)
30. Ein Schmuckstück (rechts) besteht aus einem Dreieck (schraffiert) aus Silber und einem Glasstück, die zusammen einen Kreissektor mit Radius 8 cm und Winkel $\frac{\pi}{4}$ bilden. Was sind Fläche und Umfang des Glasstücks?



31. Löse diese Gleichung für $-\pi \le x \le \pi$: $(1 + 2\cos x)(3\tan^2 x - 1) = 0$.

Numerische Ergebnisse

18: [(a) $= 125°$; $a = 3.66$ m; 3.10 m; 4.64 m^2; (b) $r = 20.05$ km; $P = 1.49°$; $Q = 168.51°$]

19: [$22.3°; 49.5°; 108.2°$]

20: [$\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{3}$]

23: [$\{240°, 300°\}$; $\{135°, 315°\}$; $\{135°, 225°\}$]

24: [$\{\pm 33.0°, \pm 57.0°, \pm 123.0°, \pm 147.0°\}$; $\{-17.5°, 127.5°\}$; $\{179.8°\}$]

25: [$\{70.5°, 120°, 240°, 289.5°\}$]

26: [$-30°$]

27: [2]

30: [268 m]

31: [$11.0\ \mathrm{cm}^2$; 15.0 cm]

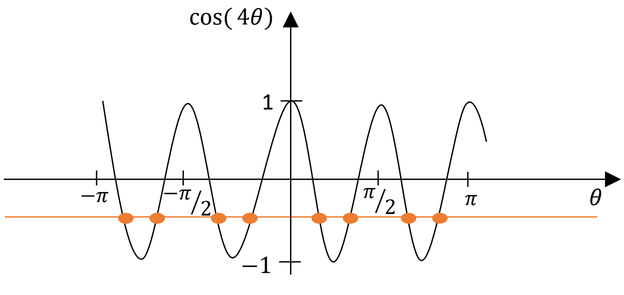
32: [$\pm\frac{\pi}{6}$; $\pm\frac{2\pi}{3}$; $\pm\frac{5\pi}{6}$]

Konstruktionsübung: *Prüfungsvorbereitung*!

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Löse die Gleichung $\cos 4\theta = -1/2$ unter der Bedingung, dass $-\pi \le \theta \le +\pi$. Was sind diese Werte in Grad?

Musterlösung:



Folgen

Wir wählen wir für die horizontale Achse θ und die vertikale Achse $\cos(4\theta)$. Die Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch und hat die Periode 2π.

Engagieren

Wir müssen den Winkel herausfinden, dessen Kosinuswert gleich $-1/2$ ist. Aber $1/2$ ist der Sinus-/Kosinuswert eines Hauptwinkels (siehe oben), und $-1/2$ entspricht der Situation, in der die Basis des Hauptwinkeldreiecks nach links gerichtet ist. Zusätzlich gibt es aber auch mehrere Werte für diesen Winkel, da die Kosinus-Funktion periodisch ist und wiederholte Funktionswerte in regelmäßigen Abständen hat.

Abstrahieren

1. Berechne den einfachsten Winkel θ anhand des zweiten Hauptwinkeldiagramms.
2. Benütze den Graph der Kosinusfunktion, um alle θ Werte im Bereich $-\pi \leq \theta \leq +\pi$ zu finden.
3. Rechne die Werte in Grad um.

Anwenden

1. $\cos(4\theta) = -\frac{1}{2}$, also $4\theta = 2\pi/3$, oder $\theta = \pi/6$.
2. Um die weiteren Werte für θ zu finden, betrachten wir die Symmetrie des gesamten Bereichs zwischen $-\pi$ und π (siehe Diagramm oben!). Weitere Lösungen sind:
$$\theta_2 = \pi - \pi/6 = \underline{5\pi/6}$$
$$\theta_3 = \frac{\pi}{2} + \pi/6 = \underline{2\pi/3}$$
$$\theta_4 = \frac{\pi}{2} - \pi/6 = \underline{\pi/3}$$
Die Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch also ist für jedes θ auch $-\theta$ eine Lösung. Also:
$$\theta \in \underline{\{\pm\pi/6\,, \pm\pi/3\,, \pm 2\pi/3\,; \pm 5\pi/6\}}$$
3. Um diese Werte in Grad umzurechnen, müssen wir sie alle mit $\frac{180°}{\pi}$ multiplizieren:
$$\theta \in \underline{\{\pm 30°, \pm 60°, \pm 120°; \pm 150°\}}$$

Ergebnis folgen

Wie diagrammatisch erwartet haben wir acht Werte für θ im Bereich zwischen $-\pi$ und π gefunden.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Löse die Gleichung $\sin\theta = -\sqrt{3}/2$ unter der Bedingung, dass $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Was sind diese Werte in Grad?