Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 08: Wie erklären wir Leben mit Naturgesetzen?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

- Naturalistisches Verständnis als nicht-magische Erklärung beschreiben;
- Newtons zweites und drittes Gesetz der Mechanik erklären;
- Wechselwirkungen zwischen Objekten in der Ebene anhand dieser Gesetze erklären;
- Probleme mit Zugkräften in Flaschenzugssystemen anhand dieser Gesetze lösen.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

Newtons Erstes Gesetz der Mechanik (***Newton 1***) besagt, dass inertiale Bewegung der Basis-Zustand unseres Erfahrens ist: In einer völlig toten Welt wäre es *nicht* der Fall, dass sich nichts bewegen würde. Stattdessen würde sich diese Bewegung *nie ändern*. Denke zum Beispiel an George Clooney, wie er so langsam und traurig von Sandra Bullock wegdriftet im Film „Gravity“! *Was verursacht also Bewegungsänderungen?*

Um dies zu beantworten, müssen wir genau verstehen, wie Mathematik und Physik zusammenhängen:

- ***Physik*** untersucht, wie wir Ereignisse *messen*;
- ***Mathematik*** untersucht die *Beziehungen* zwischen unseren Messungen;
- ***Naturalismus*** erklärt Lebensprozesse *nur anhand von Messungen und Beziehungen*.

In den 1660er bis 1670er Jahren hatte Isaac Newton drei unglaublich kreative Ideen – eine *mathematische*, eine *physikalische* und eine (fast) *naturalistische*:

- *Mathematisch*: Die Änderung der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die wir auf den Körper ausüben: $\boldsymbol{F} \propto \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$, oder: $\boldsymbol{F} = k_1 \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$
- *Physikalisch*: Die ***Gewichtskraft***, die einen Körper nach unten zieht, ist proportional zur Stärke eines von der Erde erzeugten ***Gravitationsfeldes***: $\boldsymbol{F}_g \propto \boldsymbol{g}$, oder: $\boldsymbol{F}_g = k_2\, \boldsymbol{g}$
- *Naturalistisch*: Alle Beobachter messen für das Gravitationsfeld den gleichen Wert.

Zusammengenommen bedeuten diese Ideen: *Um eine Kraft zu messen, vergleiche ihre bewegungsverändernden Effekte mit den gleichen Effekten, die durch die Schwerkraft verursacht werden*. Newton und andere haben dies folgendermaßen erreicht:

- Um uns das Leben zu erleichtern, wählen wir zunächst die mathematischen und physikalischen Proportionalitätskonstanten so, dass sie sich gleich sind, und wir nennen sie die ***Masse*** eines Körpers: $k_1 = k_2 \equiv m$.
- Wir sind uns alle einig über den Stärkevektor $\boldsymbol{g}$ des Gravitationsfeldes der Erde, also …
- … können wir uns alle auf die Körpermasse einigen, indem wir mit einer Waage den Gewichtskraftvektor $\boldsymbol{F}_g$ messen, der ihn an die Schwerkraft koppelt: $\boldsymbol{F}_g = m\, \boldsymbol{g}$.
- Wir können die Bewegung eines Körpers wie folgt messen: Der Körper ist eine Komposition aus vielen Teilchen. Wenn er sich also bewegt, trägt jedes Mikrogramm

in ihm zu dieser Bewegung bei. Wir können also die Gesamtbewegung im Körper beschreiben, indem wir seine Geschwindigkeit mit der darin enthaltenen Masse multiplizieren: $\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}$. Wir nennen $\boldsymbol{p}$ den ***Impuls*** des Körpers.

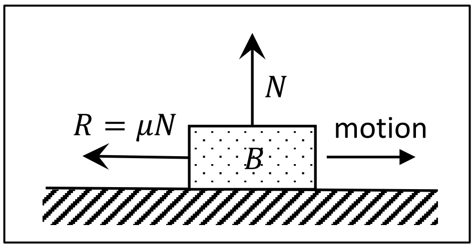
- ***Newton 2:*** Die Änderungsrate der Bewegung eines Körpers ist proportional zur *Gesamtkraft* oder Summe (Σ) aller Kräfte $\boldsymbol{F}_i$, die auf den Körper einwirken: $\sum_i \boldsymbol{F}_i = \Delta\boldsymbol{p}/\Delta t$. Falls also die Masse des Körpers konstant ist, reduziert sich Newton II auf:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = m\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = m\,\boldsymbol{a}$$

- ***Newton 3:*** *Ein System kann keine Kraft auf sich selbst ausüben!* Wenn also der Mond mit einer Kraft $\boldsymbol{F}_{EM}$ an der Erde zieht und die Erde den Mond mit einer Kraft $\boldsymbol{F}_{ME}$, dann muss die Summe dieser Kräfte gleich null sein: $\boldsymbol{F}_{EM} + \boldsymbol{F}_{ME} = \boldsymbol{0}$. Daher müssen beide Kräfte gleich stark sein, jedoch in entgegengesetzte Richtungen:

$$\boldsymbol{F}_{EM} = -\boldsymbol{F}_{ME}$$

Zwei Kräfte, die immer in Kombination auftreten, sind ***Normalkräfte*** und ***Reibung*** (siehe rechts). Beide Kraftarten entstehen, wenn sich zwei Körper entlang einer Grenzfläche berühren – wie bei dem auf der Tischfläche liegenden Block in diesem Diagramm. Die *Normalkraft* ($\boldsymbol{N}$) steht immer *senkrecht* zur Grenzfläche; die *Reibungskraft* ist immer *parallel* zur Grenzfläche. Reibungskraft entsteht durch Verschmelzung zwischen hohen Kontaktpunkten an der Grenzfläche; dies behindert die Bewegung des Blocks über den Tisch. Normalerweise ist die Reibung größer, wenn der Block statisch ist, als wenn er sich bewegt. In beiden Fällen schreiben wir:

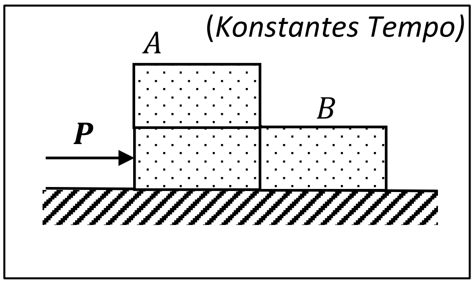


$$R = \mu\,N$$

… und sprechen von zwei unterschiedlichen Werten für μ: μ_{static} ist die ***Haftreibungskonstante***, und $\mu_{kinetic}$ ist die ***Gleitreibungskonstante***.

Um Kräfte zu vergleichen, brauchen wir Newton 2 und Newton 3

Angenommen, wir wenden eine Kraft $\boldsymbol{P}$ an, die drei identische Blöcke mit konstantem Geschwindigkeit horizontal über einen Tisch schiebt, wie in diesem Diagramm, und es gibt Reibung zwischen den Blöcken und dem Tisch. Den Stapel aus zwei Blöcken nennen wir „System A“ und den einzelnen Block „System B”.

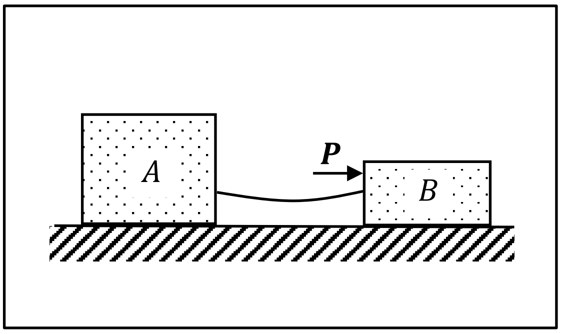


1. Die Blöcke bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit. Was sagt uns Newton 2 über die Gesamtkraft (Größe und Richtung) auf das System A, und die Gesamtkraft auf System B? Begründe Deine Antwort.
2. Zeichne im Bereich unten zwei separate Freikörperdiagramme für die Systeme A und B. Beschrifte jede Kraft in Deinen Diagrammen nach Art, Objekt und Autor der Kraft:

Freikörperdiagramm System A	Freikörperdiagramm System B

3. Wie würden sich die Blöcke verhalten, wenn der Betrag F_{AB} der Kraft des Systems B auf System A *größer wäre* als der Betrag F_{BA} der Kraft, die System A auf System B ausübt?
4. Wie würden sich die Blöcke verhalten, wenn der Betrag F_{AB} *kleiner als* der Betrag F_{BA} wäre?
5. Ist der Betrag F_{AB} *größer*, *kleiner* oder *gleich* dem Betrag F_{BA}?
6. Wäre Deine Antwort anders, wenn die Kraft $\boldsymbol{P}$ System B nach links drücken würde, anstatt System A nach rechts zu drücken. Wenn das so ist, wie? Wenn nicht, warum nicht?
7. Kennzeichne alle *Newton-3*- oder *Aktions-Reaktions*-Kraftpaare in Deinem Diagramm, indem Du ein oder mehrere kleine $\times$-Symbole auf die Pfeile setzt. Nach welchem Kriterium hast Du die Kräftepaare erkannt?
8. Ist Deine Antwort auf Frage 5 in Einklang mit Deiner Identifizierung der Aktions-Reaktions-Paare? Wenn ja, erkläre wie; wenn nicht, behebe diesen Widerspruch.
9. Ordne alle *horizontalen* Kräfte in Deinen Diagrammen nach *aufsteigendem Betrag* an. (Denke daran, die Blöcke bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit über den Tisch!)
10. Hast Du Newton 2 verwendet, um die Beträge der Horizontalkräfte zu vergleichen? Wenn, dann wie?
11. Hast Du Newton 3 verwendet, um die Beträge der Horizontalkräfte zu vergleichen? Wenn, dann wie?
12. Welche Informationen außer den Newtonschen Gesetzen musstest Du verwenden, um die Beträge der horizontalen Kräfte zu vergleichen?
13. Nehmen wir nun an, dass die Masse jedes Blocks $m = 2.5\,\mathrm{kg}$ beträgt, der Reibungskoeffizient zwischen den Blöcken und dem Tisch 0.2 beträgt und sich die Blöcke mit einer konstanten Geschwindigkeit von $0.50\ \mathrm{m/s}$ bewegen. Verwende die Näherung $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$, um den Betrag jeder der Kräfte zu berechnen, die Du in Deinen Freikörperdiagrammen gezeichnet hast.
14. Wären Deine Antworten anders, wenn sich die Blöcke halb so schnell bewegen würden? Wenn das so ist, wie? Wenn nicht, warum nicht? Diskutiere Deine Antworten in der Gruppensitzung.

Spannung ist Newton-3-Kräftepaar



Zwei Blöcke A und B, werden mit einer sehr leichten (Masse m) und nicht dehnbaren Schnur zusammengebunden. Eine horizontale Kraft $\boldsymbol{P}$ schiebt Block B horizontal über einen Tisch. Es gibt keine Reibung zwischen den Blöcken und dem Tisch, und die beiden Blöcke haben sich vor dem in diesem Diagramm gezeigten Moment bereits eine Weile bewegt.

15. Zeichne für jeden der beiden Blöcke A und B ein Freikörperdiagramm, einschließlich der horizontalen Kraft $\boldsymbol{F}_{AS}$, die die Schnur auf Block A ausübt, und der Kraft $\boldsymbol{F}_{BS}$ der Schnur auf Block B.

Freikörperdiagramm Block A	Freiköroperdiagramm Block B

16. Was ist der Betrag der Netto-Horizontalkraft, die auf die Schnur wirkt?
17. Ist der Betrag F_{AS} *größer*, *kleiner* oder *gleich* dem Betrag F_{BS}?
18. Angenommen, die Masse m der Schnur zwischen Blöcken A und B wird immer *größer*. Was würde mit den horizontalen Komponenten der Kräfte $\boldsymbol{F}_{AS}$ and $\boldsymbol{F}_{BS}$ passieren?
19. Nehmen wir nun an, die Masse m der Schnur wird immer *kleiner*. Was passiert dann mit dem Betrag der Nettokraft, die auf diese Schnur wirkt?
20. Nehmen wir wieder an, dass die Masse m der Schnur immer kleiner wird. Was passiert mit den Beträgen der Kräfte, die von Blöcken A und B auf diese Saite ausgeübt werden?

Jede Schnur, die zwei Objekte verbindet, übt auf jedes dieser Objekte eine Kraft aus. Für eine masselose Schnur ($m = 0$) haben beide Kräfte den gleichen Betrag, und wir nennen diesen Wert die ***Spannung*** in der Schnur.

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

- Ein Kräftediagramm zeigt alle Kräfte auf einen einzelnen Körper
- Wir können diese Kräfte auf die zugehörigen Komponenten projizieren
- Reibung sorgt aber wieder für Gleichgewicht

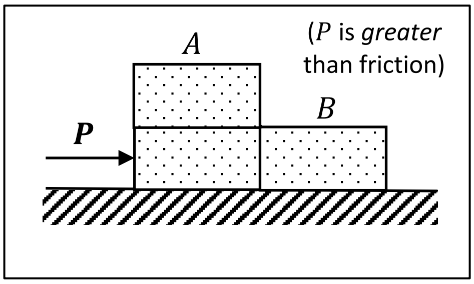
  Wichtig: Dieser Film-Clip enthält einen kleinen Leichtsinnsfehler, den Khan im nächsten kurzen (0:50) Clip korrigiert. Also machen auch Genien anscheinend Fehler!

- Reibungshöchstbetrag ist $\boldsymbol{F} = \mu\, \boldsymbol{N}$
- Zugkraft ist die Kraft einer Schnur
- Zugkraft hält Dein Picasso-Gemälde vom Herunterfallen ab!

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt <u>*gemeinsam*</u>!

Newton 2 besagt, dass Beschleunigung <u>immer</u> mit Kraft verbunden ist

Angenommen, wir wenden eine Kraft $\boldsymbol{P}$ an, die wie in diesem Diagramm drei identische Blöcke horizontal über einen Tisch schiebt, aber diesmal ist die Reibung zwischen den Blöcken und dem Tisch *kleiner* als $\boldsymbol{P}$.

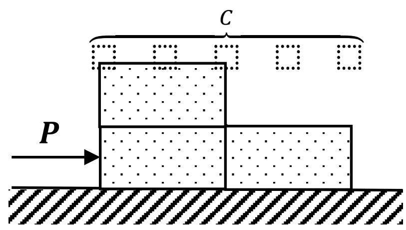


21. Was sagt uns Newton 2 über die Art der Bewegung dieser Blöcke? Wie verhält sich diese Bewegung im Vergleich zu unseren früheren Systemen A und B? Begründe Deine Antwort.
22. Vergleiche die Gesamtkraft (Betrag und Richtung) auf System A mit der Gesamtkraft auf System B. Begründe Deine Antwort.
23. Zeichne im Bereich unten zwei separate Freikörperdiagramme für die Systeme A und B. Beschrifte jede Kraft in Deinen Diagrammen nach Art, Objekt und Autor der Kraft:

Freikörperdiagramm System A	Freikörperdiagramm System B

24. Betrachte die folgende Diskussion zwischen zwei Studierenden. Welchem Studierenden stimmst Du, wenn überhaupt, zu? Erkläre Deine Argumentation:
    - Student 1: "*System A und System B werden mit der gleichen Kraft wie am Anfang dieses Kapitels geschoben, also haben sie genau die gleiche Bewegung wie zuvor.*"
    - Student 2: "*Ich bin nicht anderer Meinung. Ich denke, dass sie schneller werden, da die Reibung geringer ist. Jetzt drückt System A auf System B mit einer größeren Kraft als System B auf System A.*"
25. Ordne alle *horizontalen* Kräfte, die in Deinem Freikörperdiagramm erscheinen, in aufsteigender Reihenfolge des Betrags an. Erkläre genau, wie Du Newton 2 und Newton 3 verwendet hast, um die Beträge der Kräfte zu vergleichen.
26. Ist es möglich, die horizontalen Kräfte vollständig zu ordnen?

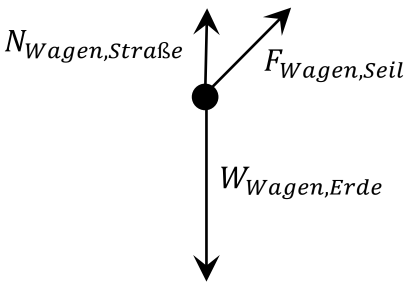
We können interne Kräfte vernachlässigen



27. Sei C nun das System, das aus allen drei Blöcken besteht (siehe Abbildung rechts). Die Bewegung der Blöcke ist die gleiche, die wir gerade betrachtet haben. Vergleiche die Größe der Gesamtkraft auf System C mit der Größe der Gesamtkraft auf System A und B. Begründe Deine Antwort.
28. Zeichne im Bereich rechts ein Freikörperdiagramm für System C. Erstelle für jede der Kräfte, die in Ihrem Diagramm für System C erscheinen, eine Liste der entsprechenden Kraft (oder Kräfte) in Deinen Diagrammen für die Systeme A und B. Gibt es Kräfte in Deinem Diagramm für die Systeme A und B, die Du nicht aufgelistet hattest? Wenn ja, welche Eigenschaft haben diese Kräfte gemeinsam, die keine der anderen Kräfte teilt? Warum brauchen wir diese Kräfte nicht zu berücksichtigen, wenn wir die Bewegung des Systems C untersuchen? Solche Kräfte werden manchmal ***innere Kräfte*** genannt.

Freikörperdiagramm System C

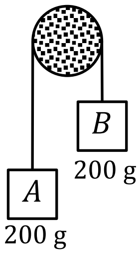
29. Unten links ist ein Freikörperdiagramm für einen Wagen – alle Kräfte sind gemessen und maßstabsgetreu gezeichnet. Skizziere rechts den Wagen und das Seil, wie sie im wirklichen Leben aussehen würden.

Freikörperdiagramm für einen Wagen	Echter Wagen
	

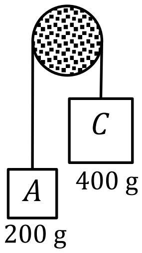
30. Was kannst Du anhand des Freikörperdiagramms über die Bewegung des Wagens sagen? Könnte der Einkaufswagen sich zum Beispiel: nach links bewegen? … nach rechts verschieben? … stillstehen? Erkläre, ob jeder Fall möglich ist und beschreibe, wenn ja, die Bewegung des Wagens.

Spannung hilft, Kräfte aus verschiedenen Diagrammen zu vergleichen

31. Das Diagramm unten zeigt eine Atwood-Maschine: ein System aus zwei identischen Blöcken, die durch eine masselose Schnur verbunden sind, die über einen reibungslosen Flaschenzug läuft. Zu Beginn halten wir Block B so, dass er sich oberhalb von Block A befindet und sich nicht bewegen kann. Sage ohne Algebra die Bewegung der beiden Blöcke voraus, nachdem wir sie losgelassen haben. Begründe Deine Vorhersage.

Flaschenzug-System	Freikörperdiagramm A	Freikörperdiagramm B
		

32. Zeichne Freikörperdiagramme für die beiden separaten Blöcke A und B. Stimmen Deine Freikörperdiagramme mit Deinen Vorhersagen über die Bewegung der Blöcke überein?
33. Jetzt ersetzen wir den Block B in der Atwood-Maschine durch einen Block C, der eine größere Masse hat als B. Zu Beginn halten wir Block C so, dass er über Block A liegt und sich keiner der Blöcke bewegen kann. Was passiert mit Block C, wenn wir ihn loslassen?

Flaschenzug-System	Freikörperdiagramm A	Freikörperdiagramm C
		

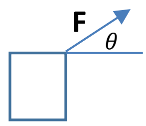
34. Wie wird sich die Bewegung von Block C mit der Bewegung von Block A vergleichen, nachdem wir die Blöcke freigegeben haben? Erkläre die Gründe für Deine Vorhersage, ohne Algebra zu verwenden.
35. Zeichne und beschrifte Freikörperdiagramme für die beiden Blöcke A and C, nachdem wir sie losgelassen haben. Zeichne die Vektorpfeile maßstabsgetreu, um die relativen Beträge der Kräfte anzugeben.
36. Stimmen Deine Freikörperdiagramme mit der Bewegung überein, die Du für die Blöcke A und C vorhergesagt hast? Falls ja, erkläre warum; falls nicht, behebe den Widerspruch.
37. Das Gewicht einer 200 g Masse hat Betrag $(0.2\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m\ s^{-2}}) \approx 2\ \mathrm{N}$. Ebenso hat das Gewicht einer 400 g Masse einen Betrag von ungefähr 4 N. Wie vergleichen sich diese beiden Gewichte mit der Kraft, die die Schnur auf den Block A ausübt?
38. Wie vergleichen sich diese beiden Gewichte mit der Kraft, die die Schnur auf Block C ausübt? Erkläre deine Antworten.
39. Wie vergleicht sich die Nettokraft auf Block A mit der Nettokraft auf Block C? Erklären.
40. Stimmst Du der folgenden Aussage zu? Erkläre Deine Argumentation: *„Das Einzige, was eine Schnur tun kann, ist Kräfte zwischen Objekten zu übertragen. Die Schnur in einer Atwood-Maschine überträgt also nur das Gewicht eines Blocks auf den anderen.“*

Prüfungsaufgaben

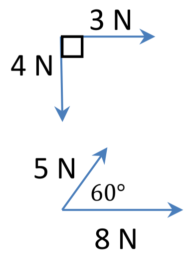
41. Skizziere ein Kräftediagramm eines Eishockey-Pucks, der sich ohne Reibung über eine Eisfläche bewegt.
42. Was ist die horizontale und die vertikale Komponente der Kraft **F** im Diagramm rechts?

43. Finde in beiden der zwei Situationen rechts den Betrag und die Richtung zur Horizontalen der resultierenden Kraft.
44. Eine Masse m hängt von zwei leichten Drahten A und B, die jeweils einen Winkel 60° und 30° zur Vertikalen machen (unten rechts). Die Zugkraft in A ist 20 N. Berechne die Zugkraft in B und die Masse m.
45. Ein Teilchen Q mit Masse m hängt von einer Schnur S mit Zugkraft 70 N und liegt auch gegen eine schiefe Ebene, die einen Winkel 60° zur Vertikalen macht. Die Schnur macht einen Winkel 10° zur Ebene (siehe unten). Zeichne ein Kräftediagramm für Q und ermittle sowohl m als auch die Reaktionskraft, die die Ebene auf Q ausübt.
46. Ein Spielzeugzug mit Gewicht 25 N wird über eine Schnur einen 20° Hang hinauf gezogen. Die Zugkraft in der Schnur ist 25 N, und eine Reibungskraft von 5 N wirkt auch auf den Zug. Finde die Reaktionskraft und auch die resultierende Kraft auf den Zug. In welche Richtung bewegt er sich?
47. Beschreibe die Bewegung einer 12 kg Masse, die von einer 50 N Kraft parallel zur rauen, horizontalen Oberfläche geschoben wird, auf der die Masse liegt. Die Oberfläche hat Reibungskoeffizienten $\mu = \frac{1}{2}$. Was ist die minimale Kraft, die gebraucht wird um diese Masse zu bewegen?
48. Ein Bild wird an der Wand von einem Haken gehängt (rechts). Berechne die Zugkraft in der Schnur.
49. Zwei Elefanten ziehen an einem Baumstamm wie im Diagramm rechts. Berechne die resultierende Kraft am Baumstamm.
50. Zwei Kräfte wirken gleichzeitig auf ein Teilchen: eine 4 N Kraft wirkt direkt nach oben und eine 5 N Kraft wirkt nach unten rechts im Winkel 30° unterhalb der Horizontalen. Was ist der Betrag und die Richtung der resultierenden Kraft auf dieses Teilchen?

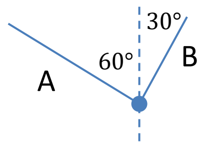
42: Komponenten:



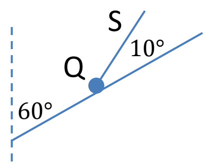
43: Zweimal resultierende Kraft:



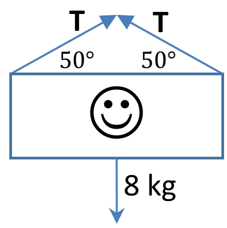
44: Zwei leichte Drahte:



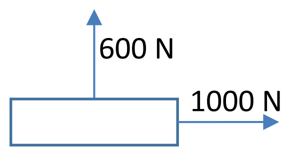
45: Masse an einer Schnur:



48: Bild an der Wand:



49: Zwei Elefanten:



51. Ein Kästchen mit Masse 39 kg liegt auf einer rauen horizontalen Ebene. Das Kästchen wird von einer 140 N Kraft aus einem Winkel 20° oberhalb der Horizontalen geschoben, aber das Kästchen bleibt trotzdem im Ruhezustand. (a) Zeichne ein Diagramm um die vier Kräfte auf das Kästchen zu veranschaulichen. (b) Berechne die normale Reaktionskraft und die Reibungskraft, die auf das Kästchen wirken.
52. Eine 7 N Kraft wirkt horizontal auf ein Teilchen. Eine andere 4 N Kraft wirkt auch auf das Teilchen aus einem Winkel 30° zur horizontalen Kraft. Die resultierende dieser zwei Kräfte hat Betrag R und Winkel α oberhalb der Horizontalen. Berechne R und α.

Numerische Ergebnisse

- 42: $[F\cos\theta; F\sin\theta]$
- 43: [5N, $-53.1°$; 11.4N, $+22.4°$]
- 44: [34.6 N; 4.08 kg]
- 45: [14.1 kg; 107 N]
- 46: [23.5 N; 11.4 N; bergauf]
- 47: [keine; 58.8 N]
- 48: [51.2 N]
- 49: [1166 N, $+31.0°$ z. Horiz.]
- 50: [4.58 N, $+19.1°$]
- 51: $[N = 430\text{ N}, R = 132\text{ N}]$
- 52: [10.7 N; 10.8°]

Konstruktionsübung: *Prüfungsvorbereitung*!

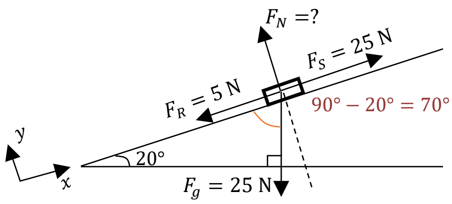
Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Ein Spielzeugzug mit Gewicht 25 N wird über eine Schnur einen 20° Hang hinauf gezogen. Die Zugkraft in der Schnur ist 25 N, und eine Reibungskraft von 5 N wirkt auch auf den Zug. Finde die resultierende Kraft und die Reaktionskraft auf den Zug. In welche Richtung bewegt er sich?

Musterlösung:

Folgen

Da x, y-Achsen in der Natur nicht existieren, sondern sind unsere eigene Erfindung, wählen wir die x-Achse parallel zum Hang und die y-Achse senkrecht zum Hang nach oben: parallel zur gesuchten Reaktionskraft F_N. Das Kräftediagramm zeigt alle relevanten Kontaktkräfte auf den Zug: die Gewichtskraft $F_g = 25$ N, die Reibungskraft $F_R = 5$ N und die Zugkraft in der Schnur $F_S = 25$ N.



Engagieren

Wir ermitteln die gesuchten Kräfte F_{res} und F_N, indem wir die Gleichung Newton 2 ($\sum_i \boldsymbol{F}_i = m\,\boldsymbol{a}$) auf die jeweiligen Achsen projizieren. Die resultierende Kraft $\boldsymbol{F}_{res} \equiv \sum_i \boldsymbol{F}_i$ ist die Summe aller Kontaktkräfte auf den Zug; sie verursacht die Gesamtbeschleunigung des Zugs. Da der Zug weder abhebt noch durch den Boden fällt, ist die y-Komponente von $\boldsymbol{F}_{res}$ gleich 0.

Abstrahieren

1. Stelle die Gleichung Newton 2 in die x- und die y-Richtungen auf.
2. Löse diese zwei Gleichungen nach $F_{res} \equiv \sum_i F_{ix}$ in die x-Richtung, und F_N in die y-Richtung auf.
3. Der Zug bewegt sich in die Richtung der Gesamtbeschleunigung aus Newton 2.

Anwenden

1. Der Zug ist also im Kräftegleichgewicht in die y-Richtung. Wir ermitteln F_{gx}, F_{gy} durch Projektion auf die x-Achse. Newton 2 in die zwei Achsenrichtungen ergibt dann:

$$F_{res} = \sum_i F_{ix} = -F_R + F_S - F_{gx}\cos(70°) = m\,a_x\,; \quad \sum_i F_{iy} = F_N - F_g\cos(20°) = 0$$

2. Die Lösungen dieser Gleichungen sind:

$$F_{res} = -5\text{ N} + 25\text{ N} - 25\text{ N}\cos(70°) \simeq \underline{11.45\text{ N}}$$
$$F_N = 25\text{ N}\cos(20°) \simeq \underline{23.49\text{ N}}$$

3. Die Gesamtbeschleunigung des Zugs ist also $a_x = F_{res}/m \approx 11.45\text{ N}/2.5\text{ kg} \approx 4.58\text{ m s}^{-2}$ in die positive x-Richtung (also bergauf).

Ergebnis folgen

Der Zug wiegt 25 N. Die resultierende Kraft zeigt, dass wir den Zug als nur 11.45 N schwer empfinden, wenn wir ihn einen Hang mit 20° Steigung hinaufziehen. Das klingt schon plausibel, denn je steiler der Weg, den man hoch radelt, desto anstrengender wird es als auf einer ebenen Straße zu fahren.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Ein Tisch mit Masse 12 kg liegt auf einem rauen, horizontalen Boden. Der Reibungskoeffizient zwischen dem Tisch und dem Boden ist $\mu = \frac{1}{2}$. Ich schiebe gegen den Tisch mit einer Kraft aus einer Richtung $30°$ oberhalb der Horizontalen. Was ist die minimale Kraft, die ich aufbringen muss, um den Tisch in Bewegung zu bringen?

Prepare yourself for learning …

• Was hast Du hier schwierig gefunden? • Wo hast Du nicht mehr weitergewusst? • Was ist Dir noch unklar? • Und … welche Lernfragen bringst zum Unterricht für dieses Kapitel mit?