

Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 05: Was ist Leben?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du ...

- Komplizität erkennen und definieren.
- Den Puzzle-Zyklus anwenden um komplizierte Puzzles über Chaos, Unvollständigkeit und Relativität zu lösen.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

Lebende Systeme werden als Systeme definiert, die eine Wahl treffen können. Diese Definition führt uns zu zwei wichtigen Überlegungen:

- Wie können wir von einem System sprechen, das eine *Wahl* trifft? Sagt die Wissenschaft nicht, dass die ganze Welt deterministisch im Voraus entschieden wird?
- *Wir* sind lebende Systeme, also müssen wir auch Wahlen treffen. Verleiht uns das eine Art Superkraft, die Computer nicht haben? (*Psst: Ja - Puzzeln!*)

Ein sehr mächtiges Konzept in der mathematischen Biologie ist **Komplizität**: *Einfache Dinge können miteinander interagieren und wirklich überraschende Folgen haben!* Zum Beispiel: Wir alle haben die Fähigkeit etwas über uns selbst zu sagen – das ist eine ganz einfache Idee. Und eine andere sehr einfache Idee ist, dass wir darüber sprechen können, wie wir Dinge beweisen können. Und jetzt pass auf: Im Jahr 1931, kombinierte Kurt Gödel diese zwei einfachen Ideen um zu beweisen, dass Computer *niemals* lebendiges, biologisches Denken ersetzen können!

Threshold 7: Komplizität

1. Gödel zeigte, dass wir die sehr einfache Sprache der Grundscharithmetik (+ – × ÷) verwenden können, um den folgenden **Gödel-Satz** \mathcal{G} aufzuschreiben

\mathcal{G} = „*Es ist unmöglich, diesen Satz zu beweisen!*“

Beachte, dass Gödel *nicht* bewies, dass \mathcal{G} wahr ist. Er zeigte lediglich, dass \mathcal{G} zur allgemeinen Arithmetik gehört, und deswegen entweder wahr oder unwahr sein könnte. Stelle Dir nun folgende Frage: Angenommen, \mathcal{G} wäre wahr – was würde das über die mathematische Aussage \mathcal{G} aussagen?

2. ... Und was würde *das* wiederum über die Art von Dingen sagen, die wir in der Arithmetik ausdrücken können?
3. Wenn also \mathcal{G} wahr ist, ist das eine sehr schlechte Nachricht für die Arithmetik und tatsächlich für die gesamte Mathematik. Aber es kommt noch schlimmer! Angenommen, \mathcal{G} wäre *falsch* – was würde *das* über \mathcal{G} aussagen? Und was würde das wiederum über die Mathematik sagen?
4. *Wir können also nicht gewinnen*: Gödel legte 1931 eine Blindgängerbombe in die Grundlagen der Mathematik! Um herauszufinden, was diese Bombe bedeutet, schaue Dir **Goldbachs Vermutung** an:

Für jede gerade Zahl N lassen sich zwei Primzahlen P_1 und P_2 finden, deren Summe gleich N ist: $N = P_1 + P_2$.

Stimmt die Vermutung von Goldbach? Teste es selbst, bis Du eine Meinung hast, und diskutiere Deine Meinung dann mit anderen.

5. Und nun die Bombe: *Niemand hat Goldbachs Vermutung jemals beweisen können!* Der einzige Grund, warum wir glauben, dass es sich dabei um eine wahre Aussage der Mathematik handelt, ist unsere persönliche Meinung. Ist das etwa eine gute Grundlage für die Mathematik?!
6. Gödels Satz bedeutet, dass wir in der Mathematik nicht nur Zahlen beweisen, berechnen und berechnen; Mathematiker raten, experimentieren und rätseln auch. Nimm zum Beispiel eine Frage, die wir früher in diesem Kurs gesehen haben:

Du fährst Dein Auto mit einem konstanten Tempo von 40 km/h von Stadt A nach Stadt D. In Stadt D angekommen, fährst Du sofort zurück nach Stadt A, jedoch mit dem höheren konstanten Tempo von 60 km/h. Was ist Dein Durchschnittstempo für die gesamte Fahrt?

Ich möchte wetten, Du hast die Antwort 50 km/h gewählt, aber tatsächlich ist die Antwort 48 km/h! Wir Menschen verwenden oft *Intuition*, um schnelle und einfache Antworten auf Fragen zu finden, aber viele Fragen sind mit Intuition zu schwer zu beantworten, und wir brauchen eine zweite Denkweise: langsames und sorgfältiges *Konstruieren*. Dies ist eine wichtige Lektion fürs Leben: *Das Lösen von Problemen der realen Welt ist nie eine einfache Rechnung – es ist sorgfältige, schwierige Arbeit!*

Aber, oh, *es macht so viel Spaß*, wenn Du endlich die Antwort selbst entdeckst! 😊

Threshold 8: Puzzeln oder Rätseln

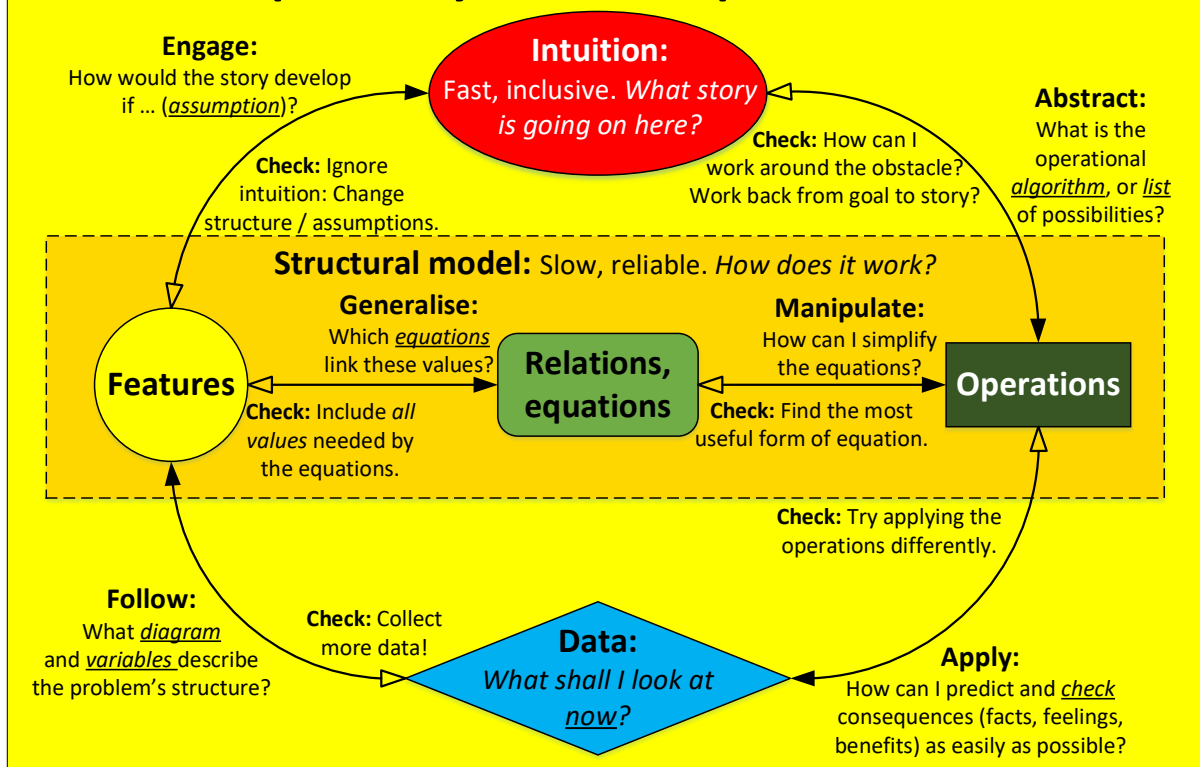
Komplizität bedeutet, dass wir mehr brauchen als nur schnelles, intuitives Denken, um zu verstehen, wie die Welt funktioniert, denn wenn wir zwei einfache, intuitive Ideen zusammenbringen, können sie in wirklich erstaunliches Verhalten explodieren, das wir intuitiv niemals erwartet hätten! Das Genie von Gödel war, dass er die schnellen *Wieso*-Antworten der Intuition als Leitfaden verwendete, aber auch die langsamen *Wie*-Antworten des Rätseldenkens, um zu überprüfen, ob seine Intuitionen wirklich funktionierten.

7. *Wir möchten diese Fähigkeit erlernen, sowohl schnelles intuitives Denken als auch langsames Puzzeln zu verwenden!* Lasst uns nun anfangen. Nimm Dir ein paar Minuten Zeit, um dieses Puzzle von Michalewicz (2008) zu lösen:

Du fährst mit einem Auto mit einem konstanten Tempo von 40 km/h von Stadt A nach Stadt B. Wie schnell musst Du von B nach A zurückfahren, wenn Dein Durchschnittstempo für die gesamte Fahrt 80 km/h betragen soll?

Hast du eine Antwort bekommen? Ich wette, Du hattest einige Schwierigkeiten, also versuchen wir es herauszupuzzeln. Erstens, was war Deine Antwort? War sie vielleicht 120 km/h? Dies ist die intuitive Antwort, aber ist sie richtig? Um das zu prüfen, gehe die folgenden Fragen zum **Puzzle-Zyklus** sehr sorgfältig durch:

The puzzle-cycle: How a puzzle evolves

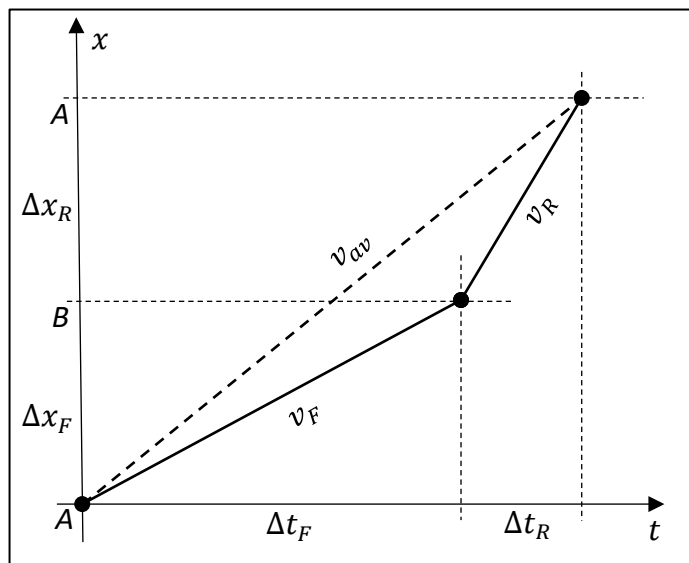


Follow	Notiere alle Features aus den Daten in der Angabe unseres Autofahr-Puzzles. Der Puzzle-Zyklus sagt, wir sollten ein Diagramm zeichnen, aber ich vermute, das hast Du nicht getan. Schauen wir also, was passiert, wenn wir das Diagramm weglassen.
Engage	Wir kennen das Tempo der Hinfahrt (v_F) und wir kennen den Durchschnitt ($\langle v \rangle$) der Hin- und Rückfahrt (v_R). Unser schnelles, intuitives Gehirn engagiert sich also mit vielen bekannten Geschichten über Durchschnittswerte, und wir machen eine Annahme: Dieses Puzzle geht um den Mittelwert zweier Tempos v_F und v_R ! Schreibe die Formel dafür auf.
Abstract	Toll! Nun abstrahieren wir unseren Lösungsalgorithmus. Welche Operationen müssen wir ausführen, um die Mittelungsformel auf die beiden angegebenen Tempos anzuwenden?
Apply	Jetzt führen wir den Mittelungsalgorithmus durch und kommen wahrscheinlich zum Ergebnis 120 km/h. Apply legt jedoch nahe, dass ich nicht nur eine Antwort generieren, sondern auch in konkreten Fällen überprüfen sollte. Versuchen wir den konkreten, einfachen Fall, bei dem die Entfernung zwischen A und B 40 km beträgt. Wir bräuchten dann eine Stunde, um dorthin zu fahren; wie lange dauert die Rückfahrt? So können wir die Gesamtstrecke unserer Rundfahrt (Δs) durch die Gesamtzeit (Δt) der Fahrt teilen und kommen so auf ein Durchschnittstempo von ... 60 km/h. Das kann doch nicht stimmen! Was ist hier schief gelaufen?!

Merke bitte, was ich hier bei **Apply** gemacht habe: Ich habe die Entfernung 40 km gewählt, weil sie mir das Leben leichter macht! Beim Überprüfen meiner Antwort möchte ich nur schnell und einfach die Richtigkeit meiner Berechnung kontrollieren: *Mache Dir das Leben nicht schwer!*

Apply	Okay, wir müssen herausfinden, was wir falsch gemacht haben, also fangen wir jetzt an, den Pfeilen rückwärts zu folgen. Können wir vielleicht die Mittelwertberechnung anders anwenden? Nicht wirklich. Weiter zurück!
Abstract / Engage	Können wir uns mit völlig anderen Intuitionen über Mittelwertberechnung engagieren? Vielleicht, aber bevor wir den Weg gehen, neige ich eher dazu, meine Intuition auszuschalten und doch noch unser Modell zu überprüfen.
Follow	Die Anweisungen sagen, wir sollten ein Diagramm zeichnen. Vielleicht machen wir das jetzt doch noch ...

8. Eine gute Wahl des Diagramms, wenn es um Geschwindigkeit und Tempo geht, ist das rechts gezeigte Raum-Zeit-Diagramm. Und hier sehen wir unser Problem: Bisher haben wir nur den Durchschnitt von zwei Tempos berechnet, aber um unser Ergebnis zu überprüfen, verwendeten wir eine ganz andere Definition des Durchschnittstempos: Gesamtstrecke/Gesamtzeit.



Seien wir diesmal vorsichtiger: Wir gehen den verlässlicheren

Weg durch das Strukturmodell. Die Gleichung für v_{av} lautet Gesamtstrecke durch Gesamtzeit. Also, wie lange dauert die Hin- und Rückfahrt insgesamt? Wie lang ist die Gesamtstrecke der Hin- und Rückfahrt? Besitzen wir alle Werte in dieser Gleichung?

9. Offensichtlich kennen wir die Strecke zwischen A und B nicht, also gehen wir zurück zu den **Daten**. Sagen sie uns etwas über die Strecke? Nein. Stattdessen folgen wir den Daten, indem wir ein neues **Feature** einführen – eine Variable d , die den Abstand zwischen A und B repräsentiert. Aus diesem Feature können wir die Struktur unseres Modells als Gleichungen **verallgemeinern**, und zu dieser einfacheren Form **manipulieren**:

$$v_{av} = 80 \text{ km/h} = \frac{2d}{\left(\frac{d}{40 \text{ km/h}}\right) + \left(\frac{d}{v_R}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{1}{40 \text{ km/h}}\right) + \left(\frac{1}{v_R}\right)}$$

Toll! Die Variable d kürzt sich aus der Gleichung weg, die jetzt nur noch die eine Variable v_R enthält! Jetzt löse Du sie: Verwende numerische Berechnungen, um eine Antwort vorherzusagen, die wir mit externen Daten vergleichen können.

10. © Du bist mit dieser Antwort wahrscheinlich auch nicht besonders glücklich! *Aber ist sie richtig?* Um das zu prüfen, müssen wir unser Modell mit irgendeiner anderen Situation testen. Wir können zum Beispiel das einfachere Problem anschauen, das wir zuvor in diesem Kurs hatten, wobei $v_F = 40 \text{ km/h}$ und $v_R = 60 \text{ km/h}$. Mache das jetzt, und zeige, dass Du meine 'richtige' Antwort von 48 km/h bekommst.

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt gemeinsam!

Wichtige Lektion: Um effektiv zu Puzzeln, brauchen wir unbedingt ein Diagramm!

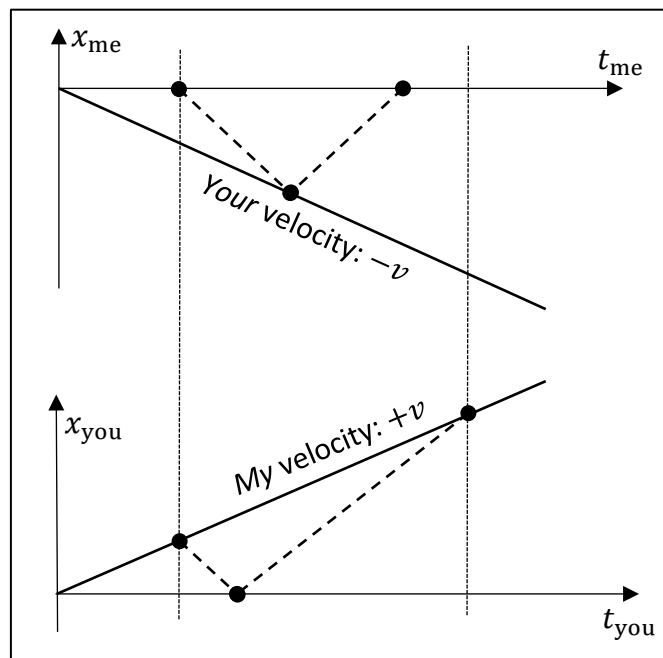
Unsere erste Begegnung mit Relativitätstheorie

Schauen wir uns ein weiteres Beispiel der Komplizität an. Nehmen wir die folgenden zwei sehr interessanten Befunde:

- Im Jahr 1600 BCE zeigte Galileo folgendes: Wenn ich mit einer Geschwindigkeit v in Deine positive x -Richtung von Dir wegfliege, sieht es für mich so aus, als würdest Du mit einer Geschwindigkeit $-v$ in meine negative x -Richtung rückwärts von mir wegfliegen.
- 1881 zeigten Michelson und Morley, dass die Lichtgeschwindigkeit $c \approx 3 \times 10^8$ m/s für Dich und mich immer gleich ist.

Wenn wir diese beiden einfachen Ideen in der folgenden Abbildung kombinieren, entdecken wir einige sehr seltsame Ergebnisse ...

11. Unten in der Abbildung ist Dein Raum-Zeit-Diagramm meines Raumschiffs, das mit Geschwindigkeit v davonfliegt. Oben ist mein Raum-Zeit-Diagramm Deines Planeten, der sich mit Geschwindigkeit $-v$ von mir wegbewegt. Wie unterscheidet sich die Steigung deines Diagramms (also meiner Bewegung) von der Steigung meines Graphen (also Deiner Bewegung)? Begründe es.



12. Dicke gestrichelte Linien sind Lichtstrahlen, die zwischen uns wandern. Warum haben Lichtstrahlen sowohl in Deinem als auch in meinem den gleichen Neigungswinkel?
13. Jeder schwarze Punkt ist ein **Ereignis** in Raum und Zeit: An einem Ort und Zeit strahle ich Dir einen Lichtstrahl entgegen, dann spiegelst Du an einem anderen Ort und Zeit dieses Licht zu mir zurück. Suche in *meinem* Graph nach dem Ereignis, bei dem ich Dir zuerst ein Lichtsignal *sende*, und beschrifte es mit S_{me} . Finde und beschrifte dann in *Deinem* Graph Deine Darstellung S_{you} desselben Ereignisses.
14. Eine kurze Weile später empfängst Du mein Lichtsignal und spiegelst (**Mirror**) es sofort zurück. Finde und beschrifte die beiden Darstellungen dieses Spiegelungsereignisses: M_{me} in meinem Rahmen und M_{you} in Deinem.
15. Noch eine kurze Weile später *empfang*e ich Dein gespiegeltes Signal. Finde und beschrifte die Darstellungen dieses Empfang-Ereignisses in meinem Frame (E_{me}) und in deinem (E_{you}).
16. Okay, jetzt fällt uns etwas sehr Seltsames auf. Schau Dir *meine* Messung der Zeitdauer zwischen S_{me} and E_{me} an. Vergleiche dies dann mit *Deiner* Messung der Zeitdauer zwischen S_{you} and E_{you} . Wir messen Zeit unterschiedlich! Nehmen wir einen

Augenblick an, die Ereignisse S_{me} and E_{me} wären die Geburt und der Tod meiner Hausratte Krätze, die in meinem Raumschiff eine Lebensdauer von 3 Jahren hat. Wie würde sich *Deine* Berechnung der Lebensdauer von Krätze von meiner unterscheiden? Nimm Dir etwas Zeit, um Deine eigene Antwort auf diese Frage zu entscheiden, und versuche dann, zwei andere Partner davon zu überzeugen, dass Deine Antwort richtig ist.

Konstruktionsübung: Prüfungsvorbereitung!

Komplizität bedeutet, dass die Welt immer voller Überraschungen steckt, die wir uns vorher nie hätten vorstellen können. Daher unterscheidet sich das Puzzle, das wir lösen, oft ganz von demjenigen, das wir ursprünglich zu lösen begonnen hatten. Denn Puzzles existieren nicht für sich allein: Eine physikalische Situation wird erst dann zu einem Puzzle, wenn wir versuchen, sie zu lösen. Und während wir daran arbeiten, entwickelt es sich zu etwas Anderem. Merke Dir folgendes:

Problemlösung ist nie ein gerader Weg von Anfang bis Ende!

Verwende nun den Puzzle-Zyklus, um *als Gesamtklasse* diese Situation zu untersuchen ...

17. Schmetterlinge sind einjährige Insekten, die ihren Lebenszyklus innerhalb eines Sommers abschließen und Eier legen, die im folgenden Frühjahr schlüpfen. Solange die Zahl x_n der Schmetterlinge im Jahr n klein ist, wächst die Zahl x_{n+1} der Schmetterlinge im Folgejahr $n + 1$ mit einer **spezifischen Wachstumsrate** μ (sag es: mü).

$$x_{n+1} = \mu x_n$$

Wird die Population jedoch größer als die Kapazität K der Nahrungsressourcen, so schrumpft die Population. Die folgende **logistische Gleichung** beschreibt diesen Wachstumsprozess von Jahr zu Jahr:

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n/K)$$

Im Jahr $n = 0$ pflanze ich in meinem Garten einen Schmetterlingsstrauch mit einer Kapazität $K = 100$ und stelle 5 Schmetterlinge sorgfältig darauf. Ich baue ein Netz um den Busch, um zu verhindern, dass Schmetterlinge zu- oder abwandern, und beobachte dann das Wachstum der Schmetterlingspopulation in den nächsten zwanzig Jahren. Der Wert der spezifischen Wachstumsrate μ liegt irgendwo im Bereich zwischen 1,0 und 3,7.

Verwendet programmierbare Taschenrechner, um zu untersuchen, wie sich meine Schmetterlingspopulation über 20 Jahre bei verschiedenen Werten von μ verhalten wird.