Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 09: Was sagt uns Algebra über die Geometrie?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

- *Beschreiben*, wie wir Geometrie zu Algebra koordinatisieren;
- Koordinatengeometrie *anwenden*, um Polynom-Kurven zu skizzieren;
- Die Eigenschaften von Geraden und Kreisen in der Ebene *berechnen*.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

Was ist Linearität?

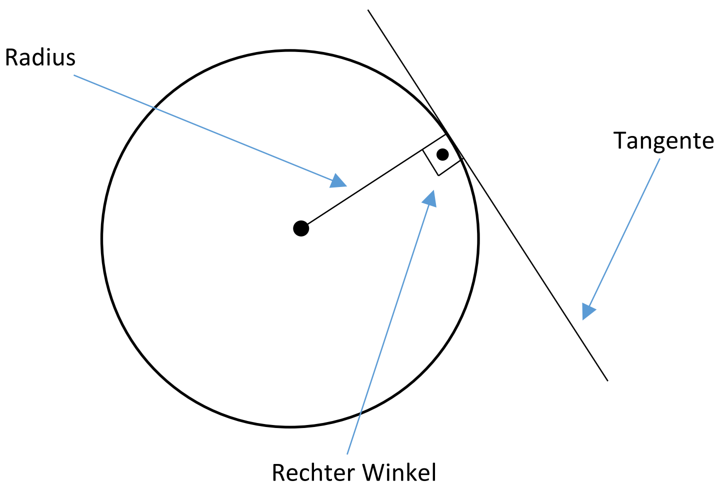
Definition: *Eine Gleichung ist linear iff ihre Variablen immer nur addiert, subtrahiert oder mit einer Konstanten multipliziert werden.*

Beispiel: Die folgenden Gleichungen enthalten drei Variablen x, y und t; alle weiteren Symbole sind konstante Zahlen. In allen drei Gleichungen tauchen die Variablen x, y und t nur linear auf, also führen alle drei Gleichungen zu einem geraden Graph:

$$y = m\,x + b$$
$$ax + by + k = 0$$
$$ax - bt = q^2$$

Was ist eine Tangente?

Die Tangente an einem Kreispunkt steht *immer* senkrecht zum Radius:



Algebraische Geometrie – einfach kennenlernen

Eventuell kannst Du die folgenden Aufgaben nicht ohne Unterstützung selber lösen. *Aber keine Panik!* Ich schlage die folgende Strategie für alle Kapiteln dieses Kurses vor:

- Schaue die folgenden vier Aufgaben kurz an, um zu sehen, was sie von Dir verlangen;
- Überfliege dann kurz die unten aufgeführten Khan-Academy Video-Clips an, um die notwendigen Informationen zu finden;
- Bearbeite dann die vier Aufgaben, und schaue immer wieder zurück zu den Videos, falls Du weitere Unterstützung brauchst.

1. Finde die Gleichung der Geraden durch diese Punkte: $(2, -1)$ und $(-4, -19)$.
2. Schreibe die Gleichung der vorigen Aufgabe in jeder der folgenden Formen:
   (i) $y - y_1 = m(x - x_1)$; (ii) $y = mx + c$; (iii) $ax + by + c = 0$, wobei $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
3. Skizziere den folgenden kubischen Graphen: (a) $y = (x - 4)^3$.
4. Was ist der Radius und die Koordinaten des Mittelpunkts des Kreises mit der Gleichung: $x^2 + y^2 = 9$.

Numerische Ergebnisse

- 1: [a) (i) $y + 1 = 3(x - 2)$; (ii) $y = 3x - 7$; (iii) $3x - y - 7 = 0$; b) (i) $y + \frac{1}{3} = \frac{1}{5}x$; (ii) $y = \frac{1}{5}x - \frac{1}{3}$; (iii) $3x - 15y - 5 = 0$]
- 4: [a) 3, $(0,0)$; b) 2, $(2, -4)$; c) 5, $(-3,4)$]

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

- Die Gleichung einer Geraden ist immer linear
- Wie finde ich die Gleichung einer Geraden aus der Steigung und einem Punkt?
- Wie finde ich die Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte?
- Pythagoras gibt uns den Abstand zwischen zwei Punkten
- Der Mittelpunkt eines Geradenabschnitts ist der Mittelwert der zwei Endpunkte
- Parallele Geraden haben dieselbe Steigung
- Die Steigung der Senkrechten ist gleich $-\mathbf{1}/(\boldsymbol{die\ andere\ Steigung})$
- Um den Graph eines Polynoms zu zeichnen, brauchen wir sein Grenzverhalten
- Um den Graph eines Polynoms zu zeichnen, brauchen wir seine Nullstellen
- Wie zeichne ich den Graph eines Polynoms?
- Die kanonische Gleichung eines Kreises ist $\boldsymbol{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$
- Wir können den Kreis anhand der kanonischen Gleichung zeichnen
- Wir können die kanonische Gleichung anhand des Graphs aufschreiben
- Wir erkennen den Kreis auch anhand der ausmultiplizierten Gleichung wieder

Konstruktion: *Gemeinsam* bearbeiten!

5. Finde die Gleichungen der Geraden, die durch diese Punkte führen:
   (a) $(2, -1)$ und $(-4, -19)$; (b) $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ und $\left(5, \frac{2}{3}\right)$.
6. Schreibe die Gleichungen der vorigen Aufgabe in jeder der folgenden Formen:
   (i) $y - y_1 = m(x - x_1)$; (ii) $y = mx + c$; (iii) $ax + by + c = 0$, wobei $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
7. Skizziere die folgenden kubischen Graphen: (a) $y = (x - 4)^3$;
   (b) $y = (3 - x)(x + 2)^2$; (c) $y = (1 - x)(x^2 - 6x + 8)$;
   (d) $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.
8. Was sind der Radius und die Koordinaten der Mitte der Kreise mit folgenden Gleichungen: (a) $x^2 + y^2 = 9$; (b) $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 4$;
   (c) $x(x + 6) = y(8 - y)$.

9. Seien die Punkte $A(2,5)$ und $B(12,-1)$ gegeben. *M* ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Berechne (a) die Koordinaten von *M*, und (b) die *exakte* (Hinweis!) Länge der Strecke $\overline{AM}$.

10. Die Gerade *L* hat die Gleichung $y = \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}$. Finde die Gleichung derjenigen Geraden, die parallel zu *L* durch den Punkt $(4,2)$ führt.

11. Finde die Gleichung der Senkrechten zur Geraden $2x - y - 7 = 0$, die durch den Punkt $(6,1)$ führt.

12. Seien $R(1,9)$ und $S(10,3)$. Finde die Gleichung der Senkrechten zu $\overline{RS}$, die durch *R* führt.

13. Seien $A(1,k)$ und $B(6,3)$; die Strecke $\overline{AB}$ hat die Gleichung $5y - x = 9$. (a) Finde den Wert von *k*. (b) Finde die Länge und den Mittelpunkt von $\overline{AB}$ in Surd-Form. (c) Sei $C(-1,0)$. Vorausgesetzt, dass die Strecke $\overline{BC}$ durch den Punkt $(2p+3, p+1)$ führt, was ist der Wert der Konstanten *p*?

14. Der Kreis *Q* hat die Gleichung $x^2 - 6x + y^2 - 8y = k$: (a) Finde den Wert von *k* vorausgesetzt, dass von *Q* der Radius 2 und die Mitte $C(3,4)$ ist. (b) Finde die Koordinaten der Punkte *A* und *B*, bei denen die Gerade $x + y = 9$ den Kreis *Q* schneidet. (c) Finde die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke $\overline{AB}$. (d) Finde den senkrechten Abstand zwischen $\overline{AB}$ und *C*.

15. Die Gerade *L* führt durch den Punkt $S(7,-3)$ und hat die Steigung -2.
    (a) Finde die Gleichung von *L* in der Form $y = mx + c$.
    (b) Zeige, dass der Punkt $T(5,1)$ auf *L* liegt.

16. *C* ist ein Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 21 = 0$.
    (a) Finde die Mitte und den Radius von *C*, wo passend in Surd-Form.
    (b) Die Strecke zwischen $P(3,6)$ und $Q(q,4)$ ist ein Durchmesser von *C*; zeige, dass $q = -1$. (c) Finde die Gleichung der Tangenten zu *C* bei *P*; gib Deine Antwort in der Form $ax + by + c = 0\ \ (a,b,c \in \mathbb{Z})$ an.

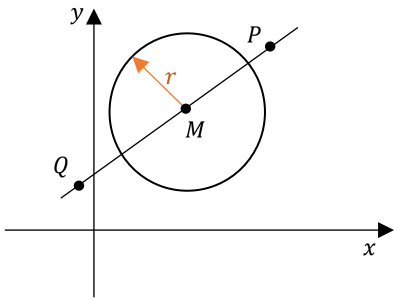
Numerische Ergebnisse

- 5: [a) (i) $y + 1 = 3(x-2)$; (ii) $y = 3x - 7$; (iii) $3x - y - 7 = 0$; b) (i) $y + \frac{1}{3} = \frac{1}{5}x$; (ii) $y = \frac{1}{5}x - \frac{1}{3}$; (iii) $3x - 15y - 5 = 0$]
- 8: [a) 3, $(0,0)$; b) 2, $(2,-4)$; c) 5, $(-3,4)$]
- 9: [$M = (7,2)$; $\overline{AM} = \sqrt{34}$]
- 10: [$y = \frac{3}{2}x - 4$]
- 11: [$y = -\frac{1}{2}x + 4$]
- 12: [$y = \frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$]
- 13: [a) 2; b) $\sqrt{26}$, $(3.5,2.5)$; 5]
- 14: [a) -21; b) $(3,6).(5,4)$; c) $(4,5)$; d) $\sqrt{2}$]
- 15: [a) $y = -2x + 11$]
- 16: [a) $(1,5)$, $\sqrt{5}$; c) $2x + y - 12 = 0$]

Konstruktionsübung: *Prüfungsvorbereitung*!

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

C ist ein Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 21 = 0$. Ist die Gerade durch die Punkte $P(3,6)$ und $Q(-1,4)$ ein Durchmesser von C?



Musterlösung:

Folgen

Seien $C: x^2 + y^2 - 2x - 10y + 21 = 0$, $P(3,6)$, $Q(-1,4)$ und M die Mitte von C. Im Diagramm nehmen wir zunächst an, dass die Punkte P und Q *nicht* auf dem Kreis liegen, da das in der Aufgabe bestimmt wurde.

Engagieren

Wir sollen testen, ob die Gerade $\overline{PQ}$ ein Durchmesser von C ist. Dies ist der Fall, wenn und nur wenn der Mittelpunkt M von C auf dieser Gerade liegt. Um M zu berechnen, wandeln wir die Kreisgleichung in die kanonische Kreisgleichung ($(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$) um. Dann testen wir, ob M auf der Geraden $\overline{PQ}$ liegt.

Abstrahieren

1. Wandle die Gleichung in die kanonische Gleichung eines Kreises um und ermittle den Mittelpunkt des Kreises.
2. Bilde die Gerade $\overline{PQ}$.
3. Prüfe, ob M auf $\overline{PQ}$ liegt.

Anwenden

1. Die Kreisgleichung ist:

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - 2x - 10y + 21 = 0 \\ \Longrightarrow\ & (x-1)^2 + (y-5)^2 - 26 + 21 = 0 \\ \Longrightarrow\ & (x-1)^2 + (y-5)^2 - 5 = 0 \\ \Longrightarrow\ & (x-1)^2 + (y-5)^2 = (\sqrt{5})^2 \end{aligned}$$

   Der Mittelpunkt von C ist also $M(1,5)$ und der Radius ist (nebenbei) $\sqrt{5}$.

2. Die Gleichung der Geraden $\overline{PQ}$ ist $\frac{(y-4)}{(x+1)} = \frac{(6-4)}{(3+1)}$, oder: $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.

3. Wir wollen bestimmen, ob $M(1,5)$ auf $\overline{PQ}$ liegt. Wir setzen also den Wert $x = 1$ in die rechte Seite der Geradengleichung und bekommen $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{9}{2} = 5$, was die y-Koordinate von M ist. M liegt also auf $\overline{PQ}$, und somit ist $\overline{PQ}$ ein Durchmesser von C. **qed**

Ergebnis folgen

Wenn wir die Punkte $Q(-1,4)$, $M(1,5)$ und $P(3,6)$ anschauen, liegen sie ziemlich auf einer Geraden, wobei die x-Koordinaten in 2-er Schritten steigen, und die y-Koordinaten in 1-er Schritten.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

K ist ein Kreis mit der Gleichung $x^2 - 6x + y^2 - 8y = -21$. Ist die Gerade durch die Punkte $P(3,6)$ und $Q(5,4)$ ein Durchmesser von K? Was ist der Radius von K?