

# Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

## Module 01: Mathematical-physical methods

### Thema 10: Was verursacht Änderung?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du ...

- Die Übertragung von Arbeit auf Interaktionsprobleme anwenden;
- Die Übertragung von Impuls auf Kollisionsprobleme anwenden.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt vorm Treffen!

### *Was verursacht Änderungen der Energie?*

Denke daran, dass der Impuls  $\mathbf{p} \equiv m \mathbf{v}$  eines Körpers der Bewegungsbetrag des Gesamtkörpers ist und dass Newtons Zweites Gesetz (Newton II) besagt, dass Kräfte eine Impulsänderung bewirken:  $\sum \mathbf{F}_i = d\mathbf{p}/dt$ .

Neben dem Impuls enthält jeder Körper auch **Energie**: seine Fähigkeit, andere Veränderungen zu verursachen. Der **Erste Hauptsatz der Thermodynamik (Thermodynamik I)** sagt uns viel über die Energie *jedes* Systems. Denken wir zum Beispiel an einen Regentropfen, der durch die Atmosphäre fällt. Thermodynamik I sagt, dass der Regentropfen seine Energie in zwei Formen speichert (*kinetisch* und *intern*), und die Menge dieser Energie kann sich durch zwei Mechanismen ändern (*Arbeit* und *Wärme*):

- i. Die Gesamtenergie  $E$  des Regentropfens setzt sich aus zwei Teilen zusammen: **kinetische Energie** ( $E_K$ ) ist die Energiemenge, die in die *geordnete* Bewegung des Regentropfens durch die Luft investiert wird; und **innere Energie** ( $E_I$ ) ist die Energiemenge, die in den ungeordneten Bewegungen und Spannungen im Regentropfen (z. B. zwischen Wassermolekülen) gespeichert ist.
- ii. Wir können außerdem die Energie  $E$  des Regentropfens auf zwei Arten ändern: Das Gravitationsfeld der Erde kann auf den Regentropfen einwirken ( $(\Delta W)$  und ihn schneller nach unten ziehen; und die Sonne kann den Regentropfen **erhitzen** ( $\Delta Q$ ), wodurch seine innere Energie erhöht wird. Also ergibt sich **Thermodynamik I**:

$$\Delta E_K + \Delta E_I = \Delta W + \Delta Q$$

Viele Alltagssituationen, zum Beispiel ein auf dem Tisch liegendes Buch, stehen im thermischen Gleichgewicht mit ihrer Umgebung; das heißt, es fließt keine Wärme und die innere Energie bleibt konstant. In diesem Fall vereinfacht sich Thermodynamik I auf den **Arbeits-Energie-Satz**:

$$\Delta W = \Delta E_K = E_{K,\text{final}} - E_{K,\text{initial}}$$

Die kinetische Energie eines Körpers mit Masse  $m$  und Tempo  $v$  definieren wir als:

$$E_K \equiv \frac{1}{2} m v^2$$

Wir definieren die an einem System geleistete Arbeit  $\Delta W$  über die Kraft ( $\mathbf{F}$ ), die auf das System ausgeübt wird, und den Weg ( $\Delta s$ ), über den sich diese Krafteinwirkung bewegt:

$$\Delta W = F \Delta s \cos(\theta) \equiv \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s}$$

Diese Art der Multiplikation zweier Vektoren heißt das **Skalarprodukt** der Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv a b \cos(\theta_{ab})$$

Wenn wir diese Ideen zusammenfassen, erhalten wir den Arbeits-Energie-Satz für Alltagssituationen:

$$\Delta E_K = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s}$$

Zu guter Letzt definieren wir auch die **Leistung** ( $P$ ) als die Arbeitsrate an einem System. Wenn die aufgebrachte Kraft  $\mathbf{F}$  constant ist, dann gilt:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \mathbf{F} \cdot \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

### Positive Arbeit erhöht die Energie

1. In den folgenden Übungen stellen wir uns einen Eishockey-Puck vor, der auf einer *reibungsfreien* Eisfläche liegt. Angenommen, wir wenden eine Kraft  $\mathbf{F}$  an, die den Puck *nach links* über die reibungsfreie Oberfläche bewegt. Die von der Kraft  $\mathbf{F}$  auf den Puck verrichtete Arbeit  $\Delta W$  ist *positiv*. Zeichne in das rechte Feld Pfeile, um die Richtung der Kraft  $\mathbf{F}$  und die Richtung der Verschiebung  $\Delta \mathbf{s}$  des Pucks anzuzeigen.

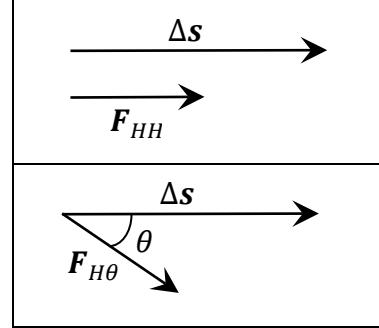
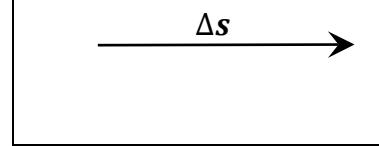
Displacement of puck	Force on the puck
----------------------	-------------------

2. Erkläre, wie Du die Kraftrichtung  $\mathbf{F}$  gewählt hast.
  1. *Beschleunigt, verlangsamt* oder *bewegt sich* der Puck mit *konstanter* Geschwindigkeit? Begründen!
  2. Angenommen jetzt, der Puck bewegt sich wieder nach links, aber nun ist die von der Kraft  $\mathbf{F}$  auf den Puck verrichtete Arbeit  $\Delta W$  *negativ*. Zeichne in das Feld rechts Pfeile, um die Richtung der Verschiebung  $\Delta \mathbf{s}$  des Pucks und die Richtung von  $\mathbf{F}$  darzustellen.

Displacement of puck	Force on the puck
----------------------	-------------------
3. Erkläre, wie Du die Kraftrichtung  $\mathbf{F}$  gewählt hast.
4. *Beschleunigt, verlangsamt* oder *bewegt sich* der Puck mit *konstanter* Geschwindigkeit? Begründen!
5. In einem neuen Experiment wirken zwei Kräfte  $\mathbf{F}_1$  und  $\mathbf{F}_2$  horizontal auf den Puck. Kraft  $\mathbf{F}_1$  verrichtet positive Arbeit, während  $\mathbf{F}_2$  negative Arbeit verrichtet ( $\Delta W_1 > 0$ ;  $\Delta W_2 < 0$ ). Zeichne für jeden der Fälle in der folgenden Tabelle ein Freikörperdiagramm, das alle horizontalen und vertikalen Kräfte auf den Puck zeigt. Sage, ob die Summe  $\Delta W_1 + \Delta W_2$  *positiv, negativ* oder *null* ist:

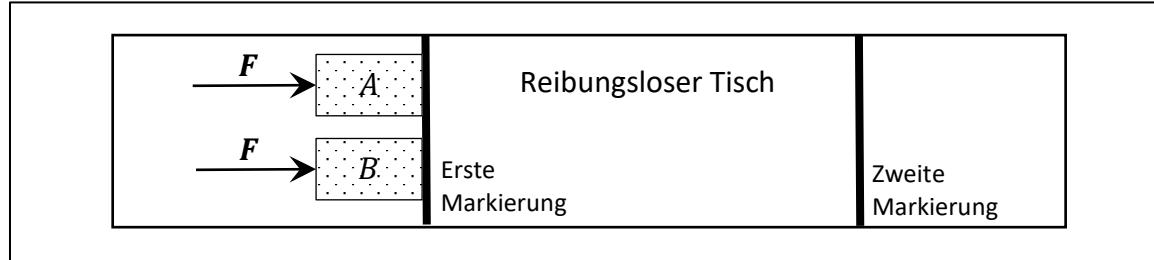
Puck bewegt sich nach rechts und wird schneller	Puck bewegt sich nach links und wird schneller
Puck bewegt sich nach rechts und wird langsamer	Puck bewegt sich nach links mit konstanter Geschwindigkeit

### Arbeit hängt von $F$ , $\Delta s$ and $\theta$ ab

6. Die beiden Diagramme rechts zeigen Kräfte gleichen Betrags  $F_H$ , die die Kraft Deiner Hand darstellen, die den Eishockeypuck um eine Verschiebung  $\Delta s$  über die *reibungsfreie* Eisfläche schiebt. Im ersten Diagramm schiebst du den Puck mit einer *horizontalen* Kraft  $\mathbf{F}_{HH}$  über das reibungsfreie Eis. Nehmen wir nun aber stattdessen an (zweites Diagramm), dass Du den Puck mit einer Kraft  $\mathbf{F}_{H\theta}$  des gleichen Betrags  $F_H$  wie zuvor schiebst, diesmal jedoch in einem Winkel  $\theta$  unterhalb der Horizontalen. Ist die Arbeit, die Du mit der neuen Kraft  $\mathbf{F}_{H\theta}$  am Puck leitest, *größer*, *kleiner* oder *gleich* der Arbeit, die Du mit der ursprünglichen Kraft  $\mathbf{F}_{HH}$  geleistet hast? Erkläre, wie Du die Definition von Arbeit verwendet hast, um Deine Antwort zu finden.
- 
7. Nehmen wir nun an (Diagramm rechts), dass Du den Puck mit einer Kraft  $\mathbf{F}_{H0}$  desselben Betrags  $F_H$  wie zuvor schieben, aber *Du leitest am Puck keine Arbeit*. Zeichne im dritten Diagramm einen Pfeil, um in diesem Fall die Richtung der Kraft  $\mathbf{F}_{H0}$  Deiner Hand darzustellen.
- 
8. Identifiziere für jedes Deiner vier obigen Freikörperdiagramme alle Kräfte auf den Puck und gib für jede Kraft an, ob sie *positive Arbeit*, *negative Arbeit* oder *Null Arbeit* auf den Puck verrichtet. Begründen!
9. Die an einem Objekt geleistete Nettoarbeit  $\Delta W_{net}$  ist die Summe der Arbeit, die von *allen* Kräften an diesem Objekt verrichtet wird. Verwende Deine vier Freikörperdiagramme und Dein Wissen über die Bewegung des Pucks, um anzugeben, ob die in jedem Diagramm am Puck verrichtete Nettoarbeit *positiv*, *negativ* oder *null* ist.
10. Ist die am Puck verrichtete Nettoarbeit *größer*, *kleiner* oder *gleich* der von der Netto- (oder Gesamt-)Kraft auf den Puck verrichtete Arbeit? Erkläre deine Argumentation.
11. Verallgemeinere Deine bisherigen Antworten, um zu beschreiben, wie sich die Geschwindigkeit eines Objekts ändert, wenn die auf dem Objekt verrichtete Nettoarbeit entweder *positiv*, *negativ* oder *null* ist.
12. Besprich mit einem Freund, wie Deine Ergebnisse mit dem Arbeits-Energie-Satz ( $\Delta W = \Delta E_K$ ) zusammenhängen.
13. Prüfe alle Deiner Ergebnisse auf Richtigkeit mit den Dozenten im Unterricht.

## Kinetische Energie und Impuls sind unabhängig voneinander

Im folgenden Experiment stehen zwei Wagen  $A$  und  $B$  zunächst im Ruhezustand auf einem horizontalen, reibungsfreien Tisch. Du übst auf jeden der zwei Wagen eine konstante Kraft mit Betrag  $F$  aus, während er zwischen den beiden in der Tabelle gezeigten Markierungen fährt. Wagen  $B$  hat eine größere Masse als Wagen  $A$  ( $m_B > m_A$ ):



14. Drei Philosophen diskutieren den Endimpuls und die kinetische Energie jedes Wagens:

- **Newton:** "Da auf beide Wagen die gleiche Kraft ausgeübt wird, bewegt sich der Wagen mit der kleineren Masse schnell, während der Wagen mit der größeren Masse langsam fährt. Der Impuls jedes Wagens ist gleich seiner Masse mal seiner Geschwindigkeit."
- **Leibnitz:** "Dies bedeutet also, dass die Geschwindigkeit die Masse ausgleicht, und daher muss der Endimpuls der beiden Wagen gleich sein."
- **Descartes:** "Ich dachte stattdessen an die kinetische Energie der Wagen. Um die kinetische Energie zu berechnen, musst du die Geschwindigkeit quadrieren, aber nicht die Masse, also muss der Wagen mit der größeren Geschwindigkeit mehr kinetische Energie haben."

Schreibe auf, ob Du jeder dieser drei Aussagen zustimmst oder nicht.

15. Welcher Wagen braucht länger für die Fahrt zwischen den beiden Markierungen? Erkläre deine Argumentation.

16. Verwende Newton II und die Definition der Beschleunigung, um für jeden Wagen eine Gleichung abzuleiten, die die Nettokraft auf den Wagen mit der Geschwindigkeitsänderung des Wagens ( $\Delta v_A$  oder  $\Delta v_B$ ) und dem Zeitintervall ( $\Delta t_A$  oder  $\Delta t_B$ ) in Beziehung setzt, das der Wagen zwischen den beiden Markierungen verbringt.

17. Ist die Größe  $m_A |\Delta v_A|$  größer, kleiner oder gleich  $m_B |\Delta v_B|$ ? Erkläre, woher Du das weißt.

18. Falls die Nettokraft  $F$  auf einen Körper konstant ist, nennen wir die Größe  $F \Delta t$  den **Stoß**, den  $F$  an den Körper abgibt. Ist der Betrag des an Wagen  $A$  gespendeten Stoßes größer, kleiner oder gleich dem Betrag des an Wagen  $B$  gespendeten Stoßes? Begründe.

19. Schreibe eine Gleichung, die zeigt, wie der an Wagen  $A$  gespendete Stoß mit der Änderung ( $\Delta p_A$ ) des Impulses ( $p_A = m_A v_A$ ) von Wagen  $A$  zusammenhängt. (Diese Beziehung wird **Stoß-Impuls-Satz** genannt)

20. Ist der Betrag des Endimpulses von Wagen  $A$  ( $p_{A_f}$ ) größer, kleiner oder gleich dem Betrag des Endimpulses von Wagen  $B$  ( $p_{B_f}$ )? Begründe.

21. Wie vergleicht sich die Nettoarbeit von Wagen  $A$  ( $\Delta W_{A,net}$ ) mit der Nettoarbeit von Wagen  $B$  ( $\Delta W_{B,net}$ )? Begründe.

22. Ist die kinetische Energie von Wagen  $A$  größer, kleiner oder gleich der kinetischen Energie von Wagen  $B$ , wenn sie an der zweiten Markierung vorbei fahren?

23. Schaue nun zurück zur obigen Diskussion zwischen Newton, Leibnitz und Descartes. Stimmst Du Deiner ursprünglichen Antwort zu? Wenn Du mit einem dieser Philosophen nicht einverstanden bist, finde heraus, was an ihren Aussagen falsch ist.

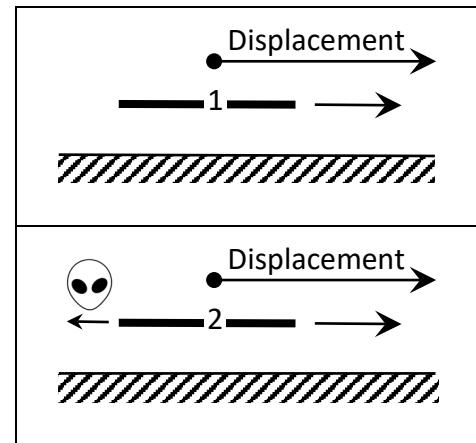
Ressourcen: [Überfliege diese Clips und Infos vorm Treffen!](#)

- [Arbeit = Kraft mal Weg:  \$\Delta W = F \cdot \Delta s \cdot \cos\(\theta\)\$](#)
- [Arbeit wird immer dann verrichtet, wenn Energie übertragen wird](#)
- [Work-Energy Theorem löst viele praktische Probleme](#)
- [Reibung konvertiert kinetische Energie zu Wärmeenergie](#)
- [Das hilft uns Probleme mit Reibung zu lösen](#)
- [Bei konservativen Kräften müssen wir nur die Endpunkte des Wegs wissen](#)
- [Leistung = Übertragung von Energie \(also Arbeit\) pro Sekunde](#)

Konstruktion: *Gemeinsam bearbeiten!*

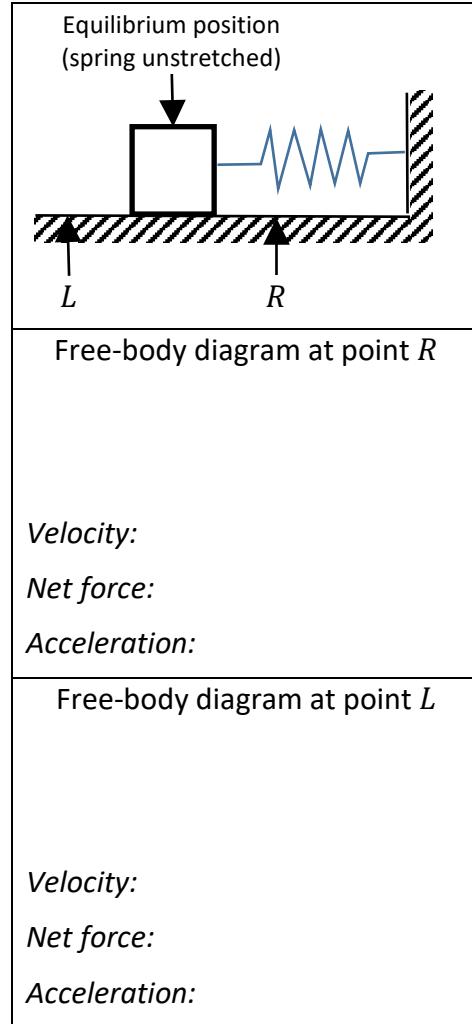
*Kinetische Energie hängt von m und  $v^2$  ab*

24. Du ziehst einen leeren Antigrav-Anhänger mit einer konstanten, horizontalen Kraft reibungslos über die Marsoberfläche. Im ersten Lauf ziehst Du ihn eine Strecke  $d$  über den Boden; in einem zweiten Lauf ziehst Du ihn  $2d$  weit über den boden. Wie viel Mal größer ist die im zweiten Lauf verrichtete Nettoarbeit im Vergleich zum ersten Lauf?
25. Angenommen, der Antigrav-Anhänger startet aus dem Ruhezustand. Wie viel Mal größer ist sein Tempo nach dem zweiten Lauf als sein Tempo nach dem ersten Lauf? *Begründe Deine Antwort anhand von Galileo 3.*
26. Jetzt legen wir eine Ladung Gesteinsproben auf den Antigrav-Anhänger und ziehen ihn mit der gleichen konstanten Kraft wie zuvor über den gleichen Boden. Beide Anhänger starten aus dem Ruhezustand, aber natürlich hat der beladene Anhänger eine größere Masse. Ist die kinetische Energie des leeren Anhängers, nachdem jeder Anhänger eine Strecke  $d$  gezogen wurde, *größer*, *kleiner* oder *gleich* der kinetischen Energie des beladenen Anhängers? Erkläre, wie Du zu Deiner Antwort kommst.
27. Die Diagramme rechts zeigen zwei identische Antigrav-Trailer, die sich reibungsfrei nach rechts über die Marsoberfläche bewegen, wobei jeder von einem horizontalen Strahltriebwerk angetrieben wird, das eine identische horizontale Kraft liefert. Der zweite Anhänger wird jedoch von einem Marsianer behindert, der sich hinten festhält und eine zusätzliche, kleinere konstante Kraft nach links liefert. Angenommen, beide Anhänger bewegen sich durch identische Verschiebungen. Ist die von Triebwerk 1 verrichtete Arbeit *größer*, *kleiner* oder *gleich* der von Triebwerk 2 verrichteten Arbeit? Begründe.
28. Ist die Änderung der kinetischen Energie von Anhänger 1 *größer*, *kleiner* oder *gleich* der Änderung der kinetischen Energie von Anhänger 2? Basiere Deine Antwort auf der Nettoarbeit, die auf jedem Trailer durchgeführt wurde.



## Arbeit kann Tempo entweder erhöhen oder verringern

29. Im Diagramm rechts ist ein Block auf einem reibungsfreien Tisch wie gezeigt über eine Feder mit der Wand verbunden. Die Feder ist zunächst ungedehnt, aber dann ziehen wir den Block *rechts* vom Punkt *R* und lassen ihn dann los. Während der Block den Punkt *R* dann passiert, ist die Feder gestaucht oder gedehnt?
30. Hängt Deine Antwort von der Richtung ab, in die sich der Block bewegt? Begründe.
31. Zeichne im rechten Zeichenbereich ein Freikörperdiagramm für den Block in dem Moment, in dem der Block den Punkt *R* passiert und sich *nach links* bewegt.
32. Zeichne nun Pfeile, um die Richtungen der Geschwindigkeit, der Nettokraft und der Beschleunigung des Blocks zu diesem Zeitpunkt darzustellen. Falls irgendeine dieser drei Größen Null ist, gib dies explizit an.
33. Ist die Nettoarbeit auf dem Block vom Punkt des Loslassens bis zum Punkt *R* *positiv*, *negativ* oder *Null*? Begründe.
34. Schließlich passiert der Block den Punkt *L* und bewegt sich *nach links*. Zeichne zu diesem Zeitpunkt ein Freikörperdiagramm für den Block. Zeichne dann Pfeile, um die Richtungen der Geschwindigkeit, der Nettokraft und der Beschleunigung des Blocks zu diesem Zeitpunkt darzustellen. Falls irgendeine dieser drei Größen Null ist, gib dies explizit an.
35. Bei einer kleinen Verschiebung des Blocks von rechts von Punkt *L* nach links von Punkt *L*, ist die auf dem Block verrichtete Nettoarbeit *positiv*, *negativ* oder *Null*? Begründe.
36. Während dieser Verschiebung von rechts von Punkt *L* nach links von Punkt *L*, wird das Tempo des Blocks *erhöht*, *verringert* oder *bleibt sie gleich*? Erkläre, inwiefern Deine Antwort mit dem Arbeits-Energie-Satz übereinstimmt.



## Wie interagieren Arbeit, Energie und Impuls miteinander?

Kommt noch ...

### Selbsttest

37. Schreibe die Gleichung für die verrichtete Arbeit auf, angenommen, dass Kraft und Weg in dieselbe Richtung zeigen. Wie lautet die Gleichung, wenn die Kraft im Winkel zur Bewegungsrichtung steht?
38. Nenne Gleichungen für (a) Leistung-Arbeit, (b) Leistung-Geschwindigkeit.
39. Nenne klar und eindeutig das Prinzip der Energieerhaltung.
40. Was sind die Gleichungen zum Berechnen kinetischer Energie und potentieller Energie der Schwerkraft?
41. Eine Kiste wird von einer 250 N Kraft 3 m quer über einen glatten Boden geschoben. Wieviel Arbeit wird dabei verrichtet?

42. Ein Kran hebt einen Betonklotz durch 12 m und verrichtet dabei 34 kJ Arbeit. (a) Was ist die Masse des Klotzes? (b) Welche Leistung bringt der Kran auf, wenn sich der Klotz mit  $0.5 \text{ ms}^{-1}$  nach oben bewegt?
43. Wieviel Arbeit verrichtet ein Cricketspieler, der einen 0.25 kg Cricketball 20 m in die Luft hochschlägt?
44. Ein Auto fährt mit  $22 \text{ ms}^{-1}$ ; dabei bringt der Motor eine Leistung von 350 kW. Was ist die Antriebskraft des Motors?
45. Ein Pferd taut ein Kanalboot (rechts) mit konstanter Geschwindigkeit zwischen zwei Schleusen, die 1500 m auseinander liegen. Die Zugkraft im Tauseil ist 100 N im Winkel  $40^\circ$  zur Bewegung. (a) Wieviel Arbeit wird am Boot verrichtet? (b) Welche Leistung wird dem Boot bei einer Geschwindigkeit von  $0.8 \text{ ms}^{-1}$  zugeführt?
46. Eine Skateboarderin fährt die eine Seite eines Half-Pipes herunter und dann die andere Seite wieder hoch. Die Seiten sind 2 m hoch. (a) Was wäre ihre Geschwindigkeit am untersten Punkt bei vernachlässigbarer Reibung? (b) Wie weit käme sie die zweite Seite hoch? (c) Echter Beton ist nicht reibungslos; was muss sie dann tun um doch hoch zu kommen?
47. Ich lasse einen 20 g Superball aus einer Höhe von 8 m fallen. (a) Finde die kinetische Energie des Balls direkt bevor er unten ankommt. (b) Der Ball springt 6.5 m wieder hoch. Wie viel Energie wurde durch die Kollision mit dem Boden in Schall und Wärme umgewandelt?

### Numerische Ergebnisse

- 43: [750 J]
- 44: [(a) 289 kg; (b) 1.417 kW]
- 45: [49 J]
- 46: [15 900 N]
- 47: [(a) 114 900 J; (b) 61.3 W]
- 48: [(a)  $6.26 \text{ ms}^{-1}$ ; (b) 2 m]
- 49: [(a) 1.57 J; (b) 0.29 J]

### Konstruktionsübung: Prüfungsvorbereitung!

*Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:*

???

*Musterlösung:*

Folgen

???

Engagieren

???

Abstrahieren

???

Anwenden

???

Ergebnis folgen

???

*Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:  
???*