Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 11: Wie stark ist der Einfluss von x auf y?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

- Ableitung als Maß des Einflusses zwischen Variablen beschreiben und anwenden;
- Stationäre Punkte von Polynomfunktionen berechnen und klassifizieren.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

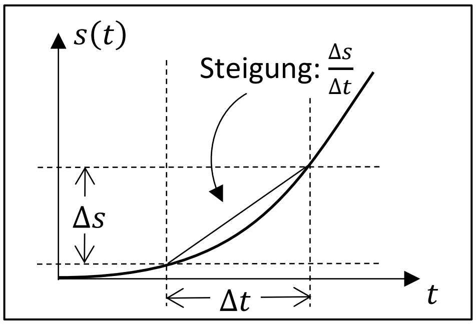
- Angenommen, Du schaltest Dein Musiksystem zu Hause im Wohnzimmer ein und gehst dann zum Schlafzimmer, um die Musik zu hören. Deine Fähigkeit, die Musik zu hören, hängt von zwei Variablen ab: der Lautstärke der Musik und der Entfernung vom Wohnzimmer zum Schlafzimmer. Wir können Deinen *Hörgrad* durch eine Funktion zweier Variablen darstellen: *Lautstärke* und *Entfernung*: $H = H(L, E)$.
- Wenn Du die Lautstärke um einen Inkrement ΔL *erhöhst*, *erhöht* dies auch Dein Hörgrad um einen *positiven* Inkrement ΔH: also $\Delta H / \Delta L > 0$.
- Wenn Du die Entfernung um einen Inkrement ΔE *erhöhst*, *verringert* dies Dein Hörgrad um einen *negativen* Inkrement ΔH: so $\Delta H / \Delta E < 0$.
- Wir nennen dieses Verhältnis $\Delta H / \Delta E$ die ***Ableitung von H nach E***. Diese Ableitung beantwortet die folgende Frage: *Wie stark ist der Einfluss von E auf H?*

Was ist eine Ableitung?

Die Ableitung einer Funktion ist eine Rechenmethode, um die Empfindlichkeit der Funktion für Änderungen eines ihrer Argumente zu messen. Zum Beispiel sagt uns Galileo, dass für einen fallenden Stein die gefallene Distanz (s) eine Funktion des Arguments Zeit (t) ist:

$$s(t) = u\,t + \tfrac{1}{2}\,g\,t^2 \quad \text{(Galileo 2)}$$

Um herauszufinden, wie empfindlich s auf Änderungen von t reagiert, müssen wir uns ansehen, wie groß die Abstandsänderung Δs im Vergleich zu einer zeitlichen Änderung Δt ist: $\Delta v / \Delta t$. Wie Du in der Grafik rechts siehst, wird der Vergleichswert jedoch erst dann präzise, wenn wir Δt wirklich sehr, sehr klein machen. Genau so definieren wir die ***Ableitung***:



$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u\,\Delta t + \frac{1}{2}\,g\,[(t + \Delta t)^2 - t^2]}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u\,\Delta t + \frac{1}{2}\,g\,[2\,t\,\Delta t + (\Delta t)^2]}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[u + 2 \cdot \frac{1}{2}\,g\,t + \frac{1}{2}\,g\,\Delta t\right] \Delta t}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left[u + g\,t + \tfrac{1}{2}\,g\,\Delta t\right] \\
&= u + gt \quad \text{(Galileo 1)}
\end{aligned}$$

Da schau' her: Geschwindigkeit ist also tatsächlich die Ableitung von Position!

Wir sehen hier also folgendes. Tempo, Ort und Zeit haben folgendes Verhältnis zueinander:

- Zeit ist ein Drehregler, der den Ort eines fallenden Steins beeinflusst;
- Wenn ich die Zeit vorspule, ändert sich die Position des Steins;
- Tempo misst die Stärke dieses Einflusses: falls das Tempo hoch ist, so führt schon eine *kleine* Zeitänderung zu einer *großen* Ortsänderung.

… und wie Du vermutlich schon weißt, solange k und n Konstanten sind, gilt im Allgemeinen:

$$[y = k\,x^n] \Longrightarrow \left[\frac{dy}{dx} = n\,k\,x^{n-1}\right]$$

Außerdem gelten für beliebige Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ diese zwei vertrauten Regeln:

$$\frac{d}{dx}\big(u(x) + v(x)\big) \equiv \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\big(a \cdot u(x)\big) \equiv a \cdot \frac{du}{dx}$$

1. Mit diesen drei Regeln können wir die Ableitung aller beliebigen Polynome berechnen. Was ist zum Beispiel die Ableitung dieser Funktion:

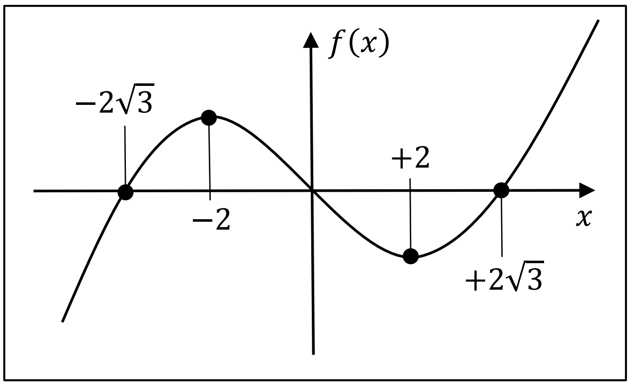
$$f(x) = 5x^3 - 2x$$

Bei stationären Punkten der Funktion $y = y(x)$ gilt: $\frac{dy}{dx} = 0$ (weil hier die *Kurve* kurzweilig die Steigung Null hat).

Bei einem lokalen Maximum gilt: $\frac{d^2y}{dx^2} \equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) < 0$ (weil die *Steigung der Kurve* hier *kleiner* wird).

Bei einem lokalen Minimum gilt: $\frac{d^2y}{dx^2} \equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) > 0$ (weil die *Steigung der Kurve* hier *größer* wird).

Stationäre Punkte auffinden



2. Hier ist ein Graph der Funktion $f(x) = x^3 - 12x$. Kontrolliere, ob ich die Kurve richtig geplottet habe, indem Du die drei Werte $f(0)$, $f\big(2\sqrt{3}\big)$ und $f\big(-2\sqrt{3}\big)$ nachprüfst.
3. Berechne einen allgemeinen Ausdruck für die Ableitung df/dx von $f(x)$.
4. Schaue Dir den Graphen an: Bei welchen Werten von x wird $f(x)$ ***stationär***? Das heißt, bei welchen Werten von x bleibt der Wert von $f(x)$ kurzweilig unbeeinflusst von kleinen Änderungen des Wertes von x?
5. Was ist die Steigung der Kurve bei diesen stationären Punkten?
6. Um wieviel ändert sich der Wert von $f(x)$, wenn x um den Wert $x = 2$ herum „wackelt"?
7. Evaluiere Deinen allgemeinen Ausdruck für die Ableitung df/dx bei $x = 2$. Entspricht dieser Wert Deiner Antwort auf die vorige Aufgabe?
8. Evaluiere Deinen allgemeinen Ausdruck bei $x = -2$. Erkläre Dein Ergebnis anhand des Graphs.

Stationäre Punkte klassifizieren

9. Evaluiere Deinen allgemeinen Ausdruck für die Ableitung bei demjenigen Punkt, wo x geringfügig *kleiner* als 2 ist, sagen wir bei $x = 1.9$. Erkläre, wie Dein Ergebnis mit dem obigen Graph übereinstimmt.
10. Evaluiere Deinen allgemeinen Ausdruck für die Ableitung bei demjenigen Punkt, wo x geringfügig *größer* als 2 ist, sagen wir bei $x = 1.9$. Erkläre, wie Dein Ergebnis mit dem obigen Graph übereinstimmt.
11. Die Änderung der Ableitung, wenn wir uns vom Punkt $x = 1.9$ zum Punkt $x = 2.1$ bewegen, wird geschrieben: $\Delta\left(\frac{df}{dx}\right) \equiv \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=2.1} - \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=1.9}$. Ist dieser Wert *größer*, *kleiner*, oder *gleich* Null?
12. Wie würde Deine Antwort anders aussehen, wenn wir uns stattdessen vom Punkt $x = -2.1$ zum Punkt $x = -1.9$ bewegen würden?
13. Der Ausdruck $\frac{d^2y}{dx^2} \equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x}}{\Delta x}$ heißt die ***zweite Ableitung***. Wir berechnen sie, indem wir einfach die erste Ableitung nochmal ableiten. Berechne einen allgemeinen Ausdruck für die zweite Ableitung d^2f/dx^2 of $f(x)$, indem Du Deine schon berechnete *erste* Ableitung *nochmal* ableitest.
14. Überprüfe, ob Deine zweite Ableitung das richtige Vorzeichen ($\pm$) liefert für jeden Deiner beiden zuvor gefundenen stationären Punkte.

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

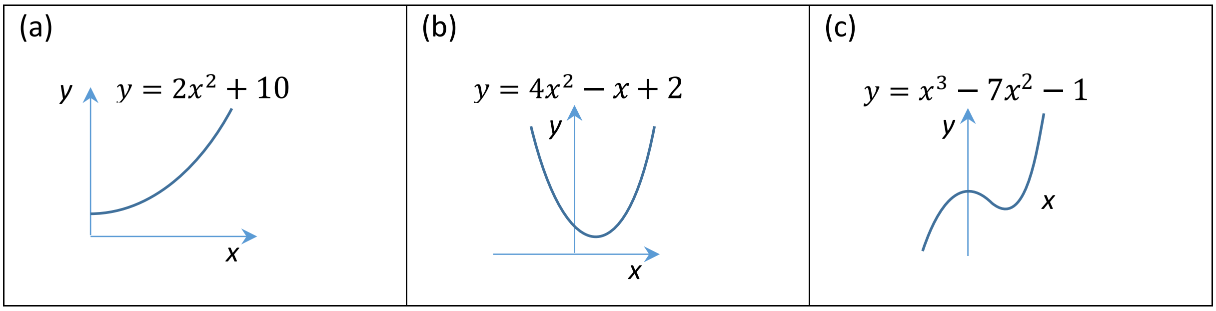
- Die Ableitung einer Größe beschreibt, wie schnell sie sich ändert
- Die Ableitung beschreibt die Steigung einer Funktion
- Die Ableitung beschreibt die Steigung der Tangente eines Graphs
- Die Ableitung ist der Limes einer Berechnung der Tangente …
- … und daraus ergibt sich die formale Definition der Ableitung
- Wir können die formale Definition praktisch anwenden …
- … und daraus ergibt sich das bekannte Rezept: $[\boldsymbol{y = x^2}] \Longrightarrow \left[\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 2x}\right]$
- Wir können Polynome ableiten
- … auch negative Potenzen … und auch Bruchpotenzen
- Mit der Ableitung finden wir auch die stationären Punkte einer Funktion
- Hierzu ein weiteres Beispiel
- Leite zweimal ab für $\mathrm{d}^2\mathrm{y}/\mathrm{dx}^2$, Wendepunkte und stationäre Punkte
- Mit Ableitungen können wir die Tangente einer Kurve berechnen

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt *gemeinsam*!

Fuß fassen

15. Schreibe eine *Formel* zum Ableiten *einer beliebigen Potenz* von x auf.
16. Leite diese Funktionen nach x ab: (a) $y = x^2 + 2$; (b) $y = x^4 + x$.

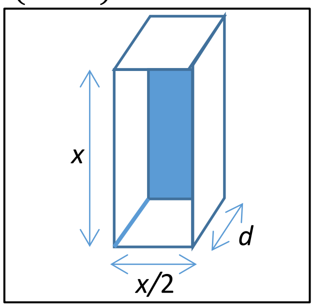
17. Finde die Steigung der drei Graphen unten bei $x = 2$.



18. Was ist der Zusammenhang zwischen der Steigung einer Kurve an einem Punkt und der Steigung der Tangenten zur Kurve am selben Punkt?
19. 1 L Wasser wird in eine Schüssel hineingegossen. Das Volumen des Wassers in der Schüssel ergibt sich aus der Funktion $V(t) = 17t^2 - 10t$. Finde die Zufuhrrate des Wassers in die Schüssel, wenn $t = 4$ s .
20. Finde die Gleichung der Tangenten und der Normalen bei $x = 5$ zur Kurve $y = x^2 - 3x - 10$.
21. Zeige, dass die Kurven $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 4x + \frac{86}{3}$ und $y = \frac{x}{4} + 1$ beide durch den Punkt $(4,2)$ führen und sich bei diesem Punk senkrecht sind.
22. Definiere den Begriff *stationärer Punkt*. Finde die stationären Punkte der Kurve $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.
23. In welchen Bereichen ist $y = 6(x + 2)(x - 3)$ ab-/steigend?
24. Der Höhepunkt *h* eines Feuerwerks hängt von der Masse *m* seiner Ladung in Gramm ab: $h(m) = \left(\frac{m^2}{10} - \frac{m^3}{300}\right)$ g . Welche Masse Schießpulver ergibt die maximale Flughöhe?

Prüfungsaufgaben

25. Angenommen, dass $y = x^7 + x + \sqrt{2}$, berechne $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ bei $x = 1$.
26. Eine Kurve hat die Gleichung $y = 2x^3 - 4x^2 - 4x + 12$. Finde dy/dx. Was ist die Steigung der Tangenten zur Kurve bei $x = 2$? Finde die Gleichung der Normalen zur Kurve bei diesem Punkt.
27. Die Kurve *C* hat die Gleichung $y = mx^3 - x^2 + 8x + 2$, wobei *m* eine Konstante ist. (a) Finde dy/dx. (b) Der Punkt *P* liegt auf *C* bei $x = 5$. Die Normale zu *C* bei *P* ist parallel zur Geraden $y + 4x - 3 = 0$. Finde den Gradienten von *C* bei *P*. (c) Berechne *m* und den *y*-Wert von *P*.
28. Die Werte $x, y \geq 0$ erfüllen die Gleichung $2x - y = 6$. (a) Wenn $W = x^2y^2$, zeige, dass $W = 4x^4 - 24x^3 + 36x^2$. (b) Zeige, dass $dW/dx = k(2x^3 - 9x^2 + 9x)$ und berechne *k*. (c) Evaluiere $\left.\frac{dW}{dx}\right|_{x=1}$ und $\left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_{x=1}$.
29. Finde und klassifiziere alle stationären Punkte der Kurve $y = x(x - 1)^2$.
30. Çimen benützt $6\ \mathrm{m}^2$ Holz um einen Schrank x m hoch, $x/2$ m breit und d m tief zu bauen (siehe rechts). (a) Zeige, dass das Volumen des Schranks $V = x - x^3/12$ ist. (b) Zeige, dass der stationäre Punkt von *V* ein Maximum ist. (c) Was ist das maximale Volumen des Schranks?
31. Klassifiziere alle stationären Punkte der Kurve $f(x) \equiv x^3 - 3x^2 - 1$. Zeige, dass $f(x)$ bei $x = 4$ aufsteigend ist.



Numerische Ergebnisse

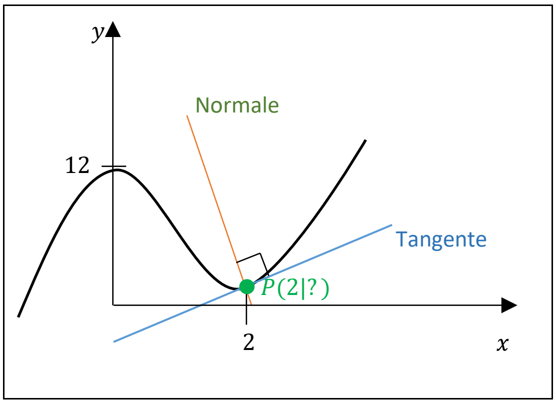
- 16: $[2x; 4x^3 + 1]$
- 17: $[8;\ 15;\ -16]$
- 19: $[0.126\ \mathrm{L/s}]$
- 20: $[y_T = 7x - 35; y_N = \frac{1}{7}(5 - x)]$
- 22: $[(1{,}5);\ (3{,}1)]$
- 23: $[x > 0.5; x < 0.5]$
- 24: [20 g]
- 25: [8; 42]
- 26: $[6x^2 - 8x - 4; 4; y = -\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{2}]$
- 27: $[3mx^2 - 2x + 8; \frac{1}{4};$ 0.03; 20.75]
- 28: [8; 16; –24]
- 29: [$(1{,}0)$ (min); $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$ (max)]
- 30: $[\frac{4}{3}\ \mathrm{m}^3]$
- 31: [max: $(0, -1)$; min: $(2, -5)$]

Konstruktionsübung: *Prüfungsvorbereitung*!

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Finde die Gleichung der Normalen zur Kurve $y = 2x^3 - 4x^2 - 4x + 12$ bei $x = 2$.

Musterlösung:



Folgen

Eine Normale ist eine Gerade, die senkrecht (orthogonal) zur Tangente einer Kurve steht. Diese Tangente berührt die Kurve in einem bestimmten Punkt P.

Engagieren

Um die Gleichung der Normalen zu finden, brauchen wir ihre Steigung, sowie ihre Verschiebung in y-Richtung. Durch die erste Ableitung der Kurvenfunktion erhalten wir die Steigung der Funktion am angegebenen Punkt. Diese Steigung ist gleich der Tagentensteigung an diesem Punkt bzw. der negative Kehrwert der Normalensteigung. Für die Verschiebung entlang der y-Achse, ermitteln wir zunächst den y-Wert des Punktes P und setzten ihn in die Geradengleichung ein.

Abstrahieren

1. Bilde $\frac{dy}{dx}$ der Funktion und evaluiere an der Stelle $x = 2$ um die Tangentensteigung (m_T) zu erhalten.
2. Ermittle die Steigung der Normalen (m_N) und finde den zugehörigen y-Wert zum Punkt P.
3. Setze P in die Gleichung der Normalen ein und ermittle c.

Anwenden

1. Die 1. Ableitung der Kurvengleichung lautet:

$$m_T(x) = \frac{dy}{dx} = 6x^2 - 8x - 4$$

Also:

$$\begin{aligned} m_T(2) &= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} \\ &= 6 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

2. Für die Steigung der Normalen gilt: $m_\perp = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{4}$. Wir setzen die x-Koordinate von P in die Kurvengleichung ein, um die zugehörige y-Koordinate zu berechnen:
$$y(2) = 2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 12 = 4$$
3. Die Gleichung der Normalen lautet: $y = m_\perp x + c$. Wir setzen $P(2|4)$ und m_N in diese Gleichung ein und lösen nach c auf: $4 = -\frac{1}{4} \cdot 2 + c$. Also gilt: $c = 4\frac{1}{2}$ und die Gleichung der Normalen ist
$$\underline{y = -\tfrac{1}{4}x + 4\tfrac{1}{2}}$$

Ergebnis verfolgen

Das negative Vorzeichen der Steigung stimmt mit unserer Zeichung im Diagramm überein. Auch der y-Achsenabschnitt der Normalen liegt ungefähr im erwarteten Bereich.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Finde die Gleichung der Normalen zur Kurve $y = x^2 - 3x - 10$ bei $x = 5$.