

Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 13: Wie berechne ich eine Ableitung?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du ...

- Ableitungsregeln auf trigonometrische, Produkt- und verschachtelte Funktionen anwenden;
- Regeln zum Ableiten der Funktionen $\exp()$ and $\ln()$ erstellen.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

Wie leite ich eine verschachtelte Funktion $u(v(x))$ ab?

Eigentlich ist die Kettenregel superleicht zu verstehen. Nehmen wir eine verschachtelte Funktion:

$$u(v(x))$$

Wir wollen $\frac{du}{dx}$ berechnen, aber leider kennen wir u nicht als Funktion von x , sondern lediglich als Funktion von v , was aber wiederum eine Funktion von x ist. Mit anderen Worten wollen wir eigentlich die Ableitung

$$\frac{du}{dx}$$

berechnen, können aber nur diese zwei Ableitungen berechnen:

$$\frac{du}{dv} \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dx}$$

Aber pass' auf. Wenn wir diese letzten zwei Ableitungen zusammen multiplizieren, kürzen sich die v 's so:

$$\frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx}$$

und da schau' her: Wir haben genau die Ableitung, die wir eigentlich wollten. Hexerei! Aber es funktioniert tatsächlich, wie Du unten im Video von Sal Khan sehen kannst.

Beispiel: Sal bearbeitet dieses Beispiel: Berechne du/dx , wobei $u = \sqrt{3x^2 - x}$. In diesem Beispiel können wir u als die Funktion

$$u(v) = \sqrt{v} = v^{\frac{1}{2}}$$

Betrachten, und v als die Funktion

$$v(x) = 3x^2 - x$$

Also haben wir laut der Kettenregel

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}} \cdot (6x - 1) = \frac{1}{2}(3x^2 - x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (6x - 1) = \frac{(6x - 1)}{2\sqrt{3x^2 - x}}$$

Benütze die Kettenregel für Trig-Funktionen

In den Video-Links unten siehst, wie die Ableitung von trigonometrischen Funktionen findest, aber im Grunde ist das Ergebnis sehr einfach. *Sofern wir im Bogenmaß arbeiten*, gelten die folgenden zwei Regeln:

$$\frac{d(\sin(x))}{dx} = \cos(x)$$
$$\frac{d(\cos(x))}{dx} = -\sin(x)$$

Wenn wir dann kompliziertere trigonometrische Funktionen ableiten wollen, verwenden wir die Kettenregel. Nehmen wir zum Beispiel an, wir wollen die Funktion $\sin(3x)$ differenzieren. Wir wählen zunächst die äußere Funktion ...

$$u(v) = \sin(v)$$

... dann die innere Funktion ...

$$v(x) = 3x$$

... was uns über die Kettenregel zu diesem Ergebnis führt:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \cos(v) \cdot 3 = 3 \cos(3x)$$

Aus der Kettenregel finden wir die Regel $dx/dy = 1/(dy/dx)$

Nehmen wir an, dass die Funktion $y(x)$ invertierbar ist (besitzt also eine Inverse):

$$y = y(x); \quad x = x(y) = y^{-1}(y(x))$$

Also gilt:

$$x = y^{-1}(y(x))$$

Leiten wir beide Seiten dieser Gleichung mit der Kettenregel ab, bekommen wir:

$$\frac{dx}{dx} = 1 = \frac{d(y^{-1})}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

oder: $\frac{d(y^{-1})}{dy} = \frac{dx}{dy} = 1/\frac{dy}{dx}$

Umkehrregel: Die Ableitung der Umkehrung einer Funktion ist der Kehrwert der Ableitung dieser Funktion!

Die Ableitung von $y = \exp(x) \equiv e^x$ ist per Definition auch e^x

Die Exponentialfunktion $\exp(x) \equiv e^x$ ist so *definiert*, dass sie die einzige Funktion ist, die ihrer eigenen Ableitung gleich ist:

$$y(x) = \exp(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \exp(x)$$

Dies ist eigentlich auch die Definition der Exponentialkonstante e :

$$e = \exp(1) = 2.718 \dots$$

Wandle $y = \ln(x)$ in $x = e^y$ um, um es abzuleiten

Nehmen wir an, dass

$$y = \ln x$$

Nun ist die Umkehrfunktion des natürlichen Logarithmus $\ln(\)$ die Funktion $\exp(\)$:

$$x = \exp y$$

Wir können also unsere neue Ableitungsregel für Umkehrfunktionen verwenden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln x) = 1/\left[\frac{dx}{dy}\right] = 1/\left[\frac{d}{dy}(\exp y)\right] = \frac{1}{\exp y} = \frac{1}{x}$$

Behalte die Trig-Identitäten immer im Werkzeugkasten

Vergiss nicht: Jede Identität ist eine Ersetzungsregel, und kann Dir helfen Funktionen so umzuformen, dass sie einfacher zum Ableiten sind. Es gibt etliche Trig-Identitäten, die oft extrem hilfreich sind, aber die wichtigsten sind:

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &\equiv 1 \\ \tan x &\equiv \frac{\sin x}{\cos x}\end{aligned}$$

Fuß fassen

1. Leite nach x ab: (a) $y = x^4 + \sqrt{x}$; (b) $y = \frac{7}{x^2} - \frac{3}{\sqrt{x}} + 12x^3$.
2. Finde und klassifiziere alle stationären Punkte der Funktion $y = x^3 + \frac{3}{x}$.
3. Finde die Gleichung der Tangenten und Normalen beim Punkt $x = 16$ auf der Kurve $y = \sqrt{x^3} - 3x - 10$.
4. Berechne $\frac{dy}{dx}$, wenn: (a) $y = \sqrt{x^3 + 2x^2}$; (b) $y = \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2x^2}}$; (c) $y = e^{5x^2}$; (d) $y = \ln(6 - x^2)$; (e) $x = 2e^y$; (f) $x = \ln(2y + 3)$.
5. Berechne $f'(x)$, wenn $f(x) =$: (a) $2 \cos 3x$; (b) $\sin^2(x + 2)$; (c) $\sqrt{\tan x}$.
6. Berechne den Gradienten bei: (a) $e^{2x}(x^2 - 3)|_{x=0}$; (b) $(\ln x \sin x)|_{x=1}$.
7. Finde die Gleichung der Tangenten zur Kurve $y = \frac{6x^2+3}{4x^2-1}$ bei $(1,3)$.
8. Berechne $\frac{dy}{dx}$, wenn $x = 0$ und $y = \csc(3x - 2)$.
9. Finde und klassifiziere den einzigen stationären Punkt der Kurve $\frac{e^x}{\sqrt{x}}$.
10. Leite nach x ab: (a) $\sqrt{x^3 + 2x^2}$; (b) $\frac{1}{\sqrt{x^3 + 2x^2}}$; (c) e^{5x^2} ; (d) $\ln(6 - x^2)$.
11. Bei jeder der folgenden Funktionen, berechne $\frac{dy}{dx}$ auf zwei verschiedene Weisen, und beweise, dass sich beide Ergebnisse identisch sind: (a) $x = 2e^y$; (b) $x = \ln(2y + 3)$.
12. Finde $f'(x)$, wenn $f(x) =$: (a) $\sin^2(x + 2)$; (b) $2 \cos 3x$; (c) $\sqrt{\tan x}$.
13. Berechne die Steigung von (a) $e^{2x}(x^2 - 3)|_{x=0}$; (b) $(\ln x \cdot \sin x)|_{x=1}$.
14. Finde die Gleichung der Tangenten zur Kurve $y = \frac{6x^2+3}{4x^2-1}$ bei $(1,3)$.
15. Berechne $\frac{dy}{dx}$, wenn $x = 0$ für die Funktion $y = \csc(3x - 2)$.
16. Finde und klassifiziere den stationären Punkt der Kurve $y = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$.

Numerical answers

- 1: [(a) $4x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; (b) $-\frac{14}{x^3} + \frac{3}{2\sqrt{x^3}} + 36x^2$]
- 2: [max: $(-1, -4)$; min: $(1, 4)$]
- 3: [$y_T = 3x - 42$; $y_N = \frac{1}{3}(34 - x)$]
- 4: [(a) $\frac{3x^2+4x}{2\sqrt{x^3+2x^2}}$ (b) $\frac{3x^2+4x}{2(\sqrt{x^3+2x^2})^3}$; (c) $10xe^{5x^2}$; (d) $-\frac{2x}{(6-x^2)}$; (e) $\frac{1}{2e^y}$; (f) $y + \frac{3}{2}$]

- 5: [(a) $-6 \sin 3x$; (b) $2 \sin(x + 2) \cos(x + 2)$; (c) $\frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$]
- 6: [(a) -6 ; (b) 0.841]
- 7: [$y_T = -4x + 7$]
- 8: [1.51]
- 9: [min: ($x = \frac{1}{2}$)]
- 10: [(a) $\frac{x(3x+4)}{2\sqrt{x^3+2x^2}}$; (b) $-\frac{x(3x+4)}{2(\sqrt{x^3+2x^2})^3}$; (c) $10xe^{5x^2}$; (d) $-\frac{2x}{(6-x^2)}$]
- 11: [(a) $\frac{1}{2e^y}$; (b) $y + 1.5$]
- 12: [(a) $2 \sin(x + 2) \cos(x + 2)$; (b) $-6 \sin 3x$; (c) $\frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$]
- 13: [(a) -6 ; (b) 0.841]
- 14: [$y_T = -4x + 7$]
- 15: [1.51]
- 16: [Minimum bei $x = \frac{1}{2}$]

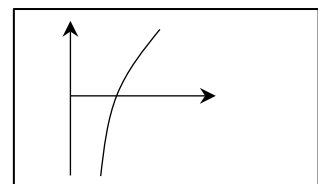
Information resources and clips: *Scan before* group session!

- [Use the chain-rule to differentiate nested functions](#)
- [Ableitungsregeln für Trig-Funktionen funktionieren nur in Radianten!](#)
- [Benütze die Produktregel zum Ableiten des Produkts zweier Funktionen](#)
- [Benütze die Quotientregel, wenn eine Funktion durch eine andere geteilt wird](#)

Construction: *During* the group session!

Beine strecken

- Berechne $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$, wenn $y = x^7 + \frac{2}{x^3}$.
- (a) Schreibe den Ausdruck $\frac{x^2+3x^{3/2}}{\sqrt{x}}$ in die Form $x^p + 3x^q$ um und finde den Wert von p und q . (b) Jetzt sei $y = 3x^3 + 5 + \frac{x^2+3x^{3/2}}{\sqrt{x}}$. Schreibe dy/dx in möglichst einfache Form um.
- Finde die Gleichung der Normalen zur Kurve $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$ bei $x = 4$.
- Beweise, dass die Kurve $x + \frac{1}{x^2}$ ein Minimum bei $x = \sqrt[3]{2}$ hat.
- Ein Dampflokomotiv fährt zwischen Penrith und Carlisle mit $x \text{ kmh}^{-1}$ und verbraucht dabei y Kohleneinheiten, wobei $y = 2\sqrt{x} + \frac{27}{x}$ (für $x > 2$). Beweise, dass es eine Geschwindigkeit gibt, die zum minimalen Kohlenverbrauch führt, und berechne diesen minimalen Verbrauch.
- Leite diese Funktionen in möglichst einfache Form ab: (a) $y = \sin^3(2x^2)$; (b) $y = \ln(3x + 1) \sin(3x + 1)$; (c) $y = \frac{\sqrt{x^2+3}}{\cos 3x}$; (d) $2 \csc(3x)$.
- Rechts ist eine Skizze der Funktion $f(x) = 4 \ln 3x$. (a) Berechne $f'(1)$. (b) Finde die Gleichung der Tangenten zur Kurve bei $x = 1$.
- Die Kurve mit der Gleichung $x = \sqrt{y^2 + 3y}$ ist monoton steigend und konkav im Intervall $x \in [0, \infty)$. Benütze $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(2,1)}$ um die Tangente zu dieser Kurve bei $(2,1)$ in der Form $y = mx + c$ zu finden.
- Finde den Gradienten der Kurve $y = \sin^2 x - 2 \cos 2x$ bei $x = \frac{\pi}{12}$.



26. Finde $dy/dx|_{x=0}$, wenn $y = \frac{e^{x+x}}{e^{x-x}}$.
27. Eine Kurve mit Gleichung $y = e^x \sin x$ hat zwei stationäre Punkte im Bereich $-\pi \leq x \leq \pi$. (a) Finde die x -Koordinate dieser beiden stationären Punkte. (b) Klassifiziere die zwei stationären Punkte.
28. Benütze die Quotientenregel um zu zeigen, dass für die Funktion $f(x) = \sec x$ gilt: $f'(x) = \sec x \tan x$.
29. Leite diese Funktionen nach x ab: (a) $\sqrt{e^x + e^{2x}}$; (b) $3e^{2x+1} - \ln(1 - x^2) + 2x^3$.
30. Finde die Gleichung der Normalen zur Kurve $x = \sin 4y$, die durch den Punkt $(0, \frac{\pi}{4})$ führt. Gib Deine Antwort in der Form $y = mx + c$ an.

Numerical answers

- 17: $[7x^6 - \frac{6}{x^4}; 42x^5 + \frac{24}{x^5}]$
- 18: $[\frac{3}{2}, 1; 9x^2 + \frac{3}{2}x^{1/2} + 3]$
- 19: $[y_N = 8x - \frac{125}{4}]$
- 21: $[9 \text{ kmh}^{-1}; 9 \text{ KE}]$
- 22: [(a) $12x \sin^2(2x^2) \cos(2x^2)$; (b) $3 \ln(3x + 1) \cos(3x + 1) + \frac{3 \sin(3x+1)}{3x+1}$;
(c) $\frac{x+3(x^2+3) \tan 3x}{(\sqrt{x^2+3}) \cos 3x}$; (d) $-6 \csc 3x \cot 3x]$
- 23: [(a) 4; (b) $y_T = 4(x - 1 + \ln 3)$]
- 24: $[y_T = 0.8x - 0.6]$
- 25: $[2.5]$
- 26: $[2]$
- 27: $[\text{Min: } x = -\frac{\pi}{4}; \text{Max: } x = \frac{3\pi}{4}]$
- 29: [(a) $\frac{e^x + 2e^{2x}}{2\sqrt{e^x + e^{2x}}}$; (b) $6e^{2x+1} + \frac{2x}{1-x^2} + 6x^2]$
- 30: $[y_T = 4x + \frac{\pi}{4}]$

Konstruktionsübung: Prüfungsvorbereitung!

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Sei $y = \frac{\sqrt{x^2+3}}{\cos 3x}$; berechne $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$.

Musterlösung:

Verfolgen

Die Funktion $y = \frac{\sqrt{x^2+3}}{\cos 3x}$ besteht aus einem Bruch. Um diesen Bruch umformen zu können, brauchen wir die Potenzregel: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Wir können auch eine Wurzel in einen Ausdruck mit Potenz umwandeln: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$. Dann hätten wir ein Produkt verschachtelter Funktionen.

Engagieren

Wenn wir den Bruch in ein Produkt umgewandelt haben, können wir für die Ableitung die Produktregel anwenden: $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Für die Verschachtelungen brauchen wir die Kettenregel.

Abstrahieren

1. Wandle den Bruch in ein Produkt um und bestimme u und v .

2. Bilde u' und v' und wende die Produktregel für Ableitungen an.
3. Evaluiere an der Stelle $x = 0$.

Anwenden

1. Wir formen den Bruch um: $y = \frac{\sqrt{x^2+3}}{\cos(3x)} = (\sqrt{x^2+3})(\cos(3x))^{-1}$, und setzen

$$u = \sqrt{x^2+3} = (x^2+3)^{\frac{1}{2}}; \quad v = (\cos(3x))^{-1}$$

2. Wir verwenden die Kettenregel um u' und v' zu bilden:

$$u' = \frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}} 2x = x(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$v' = -(\cos(3x))^{-2}(-3 \sin(3x)) = 3 \sin(3x)/\cos^2(3x)$$

dann verwenden wir die Produktregel und vereinfache das Ergebnis:

$$\frac{dy}{dx} = x(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}(\cos(3x))^{-1} + (x^2+3)^{\frac{1}{2}}[3 \sin(3x)/\cos^2(3x)]$$

$$= \frac{x}{(\sqrt{x^2+3}) \cos(3x)} + \frac{3(\sqrt{x^2+3}) \sin(3x)}{\cos^2(3x)}$$

$$= \frac{x \cos(3x) + 3(x^2+3) \sin(3x)}{\cos^2(3x)\sqrt{x^2+3}}$$

$$= \frac{x + 3(x^2+3) \tan(3x)}{(\sqrt{x^2+3}) \cos(3x)}$$

3. Am Ende setzen wir $x = 0$ ein: $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{0+3(0^2+3) \tan(3 \times 0)}{(\sqrt{0^2+3}) \cos(3 \times 0)} = \underline{0}$.

Ergebnis verfolgen

Die Ableitung der Funktion zeigt, dass an der Stelle $x = 0$ ein stationärer Punkt ist. Mit anderen Worten, ist der Wert der Funktion links und rechts von $x = 0$ ungefähr gleich. Zähler und Nenner von y haben auch diese Eigenschaft; deswegen ist der Wert von y links und rechts von $x = 0$ auch ungefähr gleich.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Sei $y = \ln(3x+1) \sin(3x+1)$; berechne $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Finde die Steigung der Tangenten zur Kurve $y = \sin^2 x - 2 \cos 2x$ bei $x = \frac{\pi}{12}$.

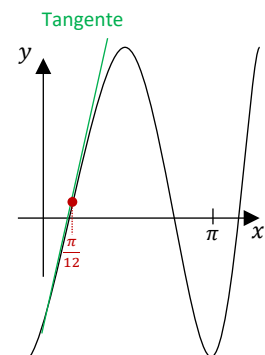
Musterlösung:

Verfolgen

Wir haben eine Kurve $y = \sin^2 x - 2 \cos 2x$ gegeben und suchen die Steigung der Tangente m_T bei $x = \frac{\pi}{12}$.

Engagieren

Wir wissen, dass wir die Steigung einer Kurve mit Hilfe der 1. Ableitung ermitteln. Wenn wir an einem bestimmten Punkt der Kurve eine Tangente anlegen, haben die Kurve und die Tangente die gleiche Steigung in diesem Punkt. Da die Kurve eine Verschachtelung von Funktionen enthält, brauchen wir die Kettenregel um die 1. Ableitung von y zu bilden.



Abstrahieren

1. Verwende die Kettenregel und bilde die 1. Ableitung, also $\frac{dy}{dx}$.

2. Evaluiere $\frac{dy}{dx}$ an der Stelle $x = \frac{\pi}{12}$.

Anwenden

1. Wir verwenden die Kettenregel um die 1. Ableitung der Kurve zu bilden und somit einen Ausdruck für die Steigung der Kurve zu bekommen:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \sin x \cos x + 4 \sin 2x$$

2. Die Steigung der Tangente (m_T) bei $x = \frac{\pi}{12}$ ist gleich der Steigung der Kurve y in diesem Punkt. Deshalb setzen wir $x = \frac{\pi}{12}$ in $\frac{dy}{dx}$ ein und verwenden die Hauptwinkeldiagramme um die Tangentensteigung zu berechnen:

$$m_T = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\frac{\pi}{12}} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{2}$$

Ergebnis verfolgen

Die errechnete Steigung liegt im erwarteten Bereich. Wie wir im Diagramm sehen können, ist die erwartete Steigung der Tangente größer als 1 und positiv. Unser Ergebnis scheint plausibel.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Finde die Steigung der Normalen zur Kurve $x = \sin 4y$ bei $y = \frac{\pi}{4}$.