Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 15: Trig-Funktionen geben Übung in Gleichungen

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

- Trigonometrische Funktionen zur Lösung trigonometrischer Gleichungen anwenden.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

Jede trigonometrische Funktion hat eine Kehrfunktion

$\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ und $\tan^{-1}$ sind die ***inversen Funktionen*** (***Kehrfunktionen***) von $\sin(\,)$, $\cos(\,)$, und $\tan(\,)$:

$$\begin{aligned} x = \sin(y) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \operatorname{asin}(x) \equiv \sin^{-1}(x) \\ x = \cos(y) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \operatorname{acos}(x) \equiv \cos^{-1}(x) \\ x = \tan(y) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \operatorname{atan}(x) \equiv \tan^{-1}(x) \end{aligned}$$

Diese sind oft nützlich, um Winkel aus Längendaten zu berechnen.

Die Pythagoras-Identitäten helfen Gleichungen und Integrale zu lösen

Es gibt unendlich viele Identitäten, die die trigonometrischen Funktionen Sinus, Cosinus und Tangens miteinander verbinden. Besonders nützlich sind die Pythagoras-Identitäten:

$$\begin{aligned} & \sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1 \\ \Longrightarrow \quad & \tan^2 x + 1 \equiv \sec^2 x \\ \Longrightarrow \quad & 1 + \cot^2 x \equiv \csc^2 x \end{aligned}$$

Wenn wir die erste Identität durch $\cos^2 x$ teilen, erhalten wir die zweite Identität. Wenn wir die erste Identität durch $\sin^2 x$ teilen, erhalten wir die dritte Identität. Wir verwenden diese Identitäten, um Gleichungen und Integrale zu vereinfachen, um sie zu lösen oder auszuwerten. Wir können die trigonometrischen Identitäten auch verwenden, um andere, kompliziertere Identitäten abzuleiten, die zum Lösen von Gleichungen nützlich sein können.

Sekante, Kosekans und Kotangens tauchen oft in Gleichungen auf

csc, sec und tan sind die ***Kehrwerte*** von sin, cos und tan. Beim Lösen trigonometrischer Gleichungen ist es oft nützlich, sich daran zu erinnern, dass wir immer die folgenden Substitutionen vornehmen können:

$$\begin{aligned} \csc x &\equiv \frac{1}{\sin x} \\ \sec x &\equiv \frac{1}{\cos x} \\ \cot x &\equiv \frac{1}{\tan x} \equiv \frac{\cos x}{\sin x} \end{aligned}$$

Im Allgemeinen empfehle ich zum Lösen einer trigonometrischen Gleichung, die gesamte Gleichung auf eine einzige trigonometrische Funktion zu reduzieren – vorzugsweise Sinus oder Cosinus.

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

- Hier ist eine Zusammenfassung der inversen Trig-Funktionen.
- Um die inversen Trig-Funktionen zu zeichnen schränken wir ihre Domäne ein
- Der Wert dieser Funktionen hängt vom ausgewählten Wertebereich ab
- cosec, sec und cot sind die Kehrwerte von sin, cos und tan

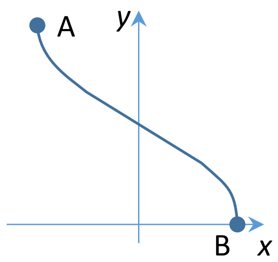
Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt *gemeinsam*!

Fuß fassen

1. Berechne diese Winkel in Radianten zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$:
   (a) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$; (b) $\cos^{-1} 0$; (c) $\tan^{-1}\sqrt{3}$.
2. Skizziere die Graphen von $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ und $\tan^{-1}$, und nenne ihre Domänen und Wertebereiche.
3. Finde den exakten Wert von (a) $\csc 30°$, (b) $\sec 30°$ und (c) $\cot 30°$.
4. Skizziere die Graphen von csc( ), sec( ) und cot( ) im Bereich $[-2\pi, 2\pi]$.
5. Benütze die Pythagoras-Identität $\sin^2\theta + \cos^2\theta \equiv 1$ um die neue Identität $\sec^2\theta \equiv 1 + \tan^2\theta$ herzuleiten.
6. Benütze die Trig-Identitäten um zu zeigen, dass
$$\cot^2\theta + \sin^2\theta \equiv \csc^2\theta - \cos^2\theta$$

Beine strecken

7. Skizziere den Graph von $y = \csc x$ im Bereich $x \in [-\pi, \pi]$.
8. Löse die Gleichung $\csc x = \frac{5}{4}$ für $-\pi \leq x \leq \pi$ auf 3 sig. Stellen genau.
9. Löse die Gleichung $\csc x = 3\sec x$ auf 3 Stellen genau für $x \in [-\pi, \pi]$.
10. Der Graph rechts zeigt die Kurve $y = \cos^{-1} x$, wobei y in Radianten angegeben ist und A und B die Endpunkte der Kurve sind. (a) Schreibe die Koordinaten von A und B auf. (b) Gib einen Ausdruck für x bezogen auf y an. (c) Löse im Bereich des Graphs die Gleichung $\cos^{-1} x = 2$.



11. (a) Zeige, dass $\frac{2\sin x}{1-\cos x} - \frac{2\cos x}{\sin x} \equiv 2\csc x$. (b) Benütze dieses Ergebnis um alle Lösungen der folgenden Gleichung im Bereich $x \in (0, 2\pi)$ zu finden:
$$\frac{2\sin x}{1-\cos x} - \frac{2\cos x}{\sin x} = 4$$
12. (a) Benütze eine passende Identität um zu zeigen, dass die Gleichung $3\tan^2\theta - 2\sec\theta = 5$ in die neue Form $3\sec^2\theta - 2\sec\theta - 8 = 0$ umgeschrieben werden kann. (b) Benütze dieses Ergebnis um zu zeigen, dass entweder $\cos\theta = -\frac{3}{4}$ oder $\cos\theta = \frac{1}{2}$. (c) Benütze diese Ideen um die Gleichung $3\tan^2 2x - 2\sec 2x = 5$ im Bereich $x \in [0, 180°]$ zu lösen.

Numerische Ergebnise

- 1: [(a) $\frac{\pi}{4}$; (b) $\frac{\pi}{2}$; (c) $\frac{\pi}{3}$]
- 3: [(a) 2; (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; (c) $\sqrt{3}$]

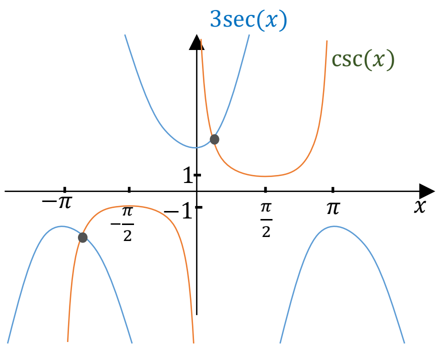
- 8: [$x \in \{0.927, 2.21\}$]
- 9: [$x \in \{-2.82, 0.322\}$]
- 10: [(a) $A(-1, \pi)$; $B(1,0)$; (b) $x = \cos(y)$; (c) -0.416]
- 11: [(b) $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$]
- 12: [(c) $x \in \{69.30°, 110.70°, 30°, 150°\}$]

Konstruktionsübung: *Prüfungsvorbereitung*!

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Löse die Gleichung $\csc x = 3 \sec x$ auf 3 Stellen genau für $x \in [-\pi, \pi]$.

Musterlösung:



Verfolgen

Wir suchen nach Stellen, an den der Kehrwert $\csc(x)$ der Sinusfunktion gleich dreimal dem Kehrwert ($3\sec(x)$) der Kosinusfunktion ist. Weil diese Funktionen periodisch sind, wird diese Bedingung mehrmals im gegebenen Wertebereich erfüllt.

Engagieren

Um die Stellen zu finden, an der beide Funktionen den gleichen Wert haben, müssen wir die Gleichung nach x lösen. Um die Gleichung einfacher zu machen, verwenden wir den Kehrwert bekannter, trigonometrischer Funktionen.

Abstrahieren

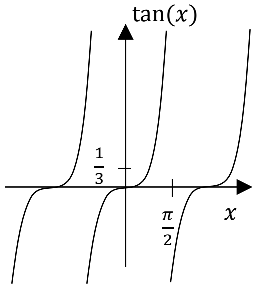
1. Wandele die trigonometrischen Funktionen der Gleichung in äquivalente Basisfunktionen um.
2. Benütze Trig-Identitäten um diese auf eine einzige Basisfunktion zu reduzieren.
3. Löse die daraus resultierende Funktion nach x auf.

Anwenden

1. Wir wissen, dass $\csc(x) \equiv \frac{1}{\sin(x)}$ und $\sec(x) \equiv \frac{1}{\cos(x)}$, also bekommen wir die neue Gleichung:

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{3}{\cos(x)}$$

2. Jetzt suchen wir nach passenden Trig-Identitäten wie Pythagoras oder Tangens um diese Funktionen auf eine einzige zu reduzieren. $\sin x = 0$ ist keine Lösung der Gleichung, also multiplizieren wir beide Seiten mit $\sin x$ und benützen $\tan x \equiv \frac{\sin x}{\cos x}$:



$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{3} = \tan(x)$$

3. Jetzt lösen wir diese Gleichung für alle $x \in [-\pi, \pi]$:

$$x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.322$$

Nach Berücksichtigung des Graphs rechts hat $\tan(x)$ im Bereich $[-\pi, \pi]$ an nur zwei Stellen den positiven Wert $+\frac{1}{3}$: 0.322 und $-\pi + 0.322 \approx 2.822$. Also gilt: $\underline{x \in \{-2.822{,}0.322\}}$.

Ergebnis verfolgen

Unsere Werte ähneln unseren erwarteten Werte aus dem Diagramm. Ebenso stimmen unsere Ergebnisse mit der Tangensfunktion überein.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Löse die Gleichung $\csc x = \frac{5}{4}$ für $-\pi \leq x \leq \pi$ auf 3 signifikante Stellen genau.