Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 16: Wie kombinieren sich Kräfte zu Situationen?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

- Apply the concepts centre of mass and mechanical equilibrium to solve statics problems.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

Mechanisches Gleichgewicht: der Schlüssel zu Leiter-Aufgaben

Stelle Dich 50 cm weg von einer Wand und stütze Dich mit den Händen gegen die Wand. Jetzt, ohne umzufallen, überlege Dir: Wenn Deine Füße stattdessen 1.5 m weg von der Wand wären, könntest Du Dich immer noch theoretisch gegen die Wand stützen, und dabei würde nur sehr wenig von Deinem Gewicht auf den Boden lasten. Stattdessen würde Dich die Wand stützen.

Aber das ist doch unmöglich, oder? Schließlich steht die Wand nicht unter Dir, sondern neben Dir, und kann daher Dein Gewicht nicht stützen, oder?

Die Antwort auf diese Frage ist eine raffinierte Mischung aus Reibung und Drehmoment! Die Reibung zwischen Deinen Händen und der Wand ist eine nach oben gerichtete Kraft, die Dein Gewicht tatsächlich unterstützt. Da aber der Angriffspunkt dieser Reibungskraft seitlich von Deinen Füssen versetzt ist, übt sie ein Drehmoment auf Deinen Körper aus, welches Sie vom Umfallen abhält. Wir werden diese Situation in den Prüfungsaufgaben unten untersuchen.

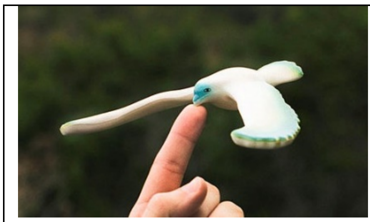
Wichtig dabei ist die Tatsache, dass Dein Körper sich im *mechanischen Gleichgewicht* befindet; das heißt, die Summe aller Kräfte *und* Drehmomente auf Deinen Körper ist gleich Null:

Kraft ist das, was einen Körper *beschleunigt*. Wäre also die Summe aller *Kräfte* auf Deinen Körper ungleich Null, würdest Du Dich von der Stelle *beschleunigen*.

Drehmoment ist das, was einen Körper in *drehbeschleunigt*. Wäre also die Summe aller *Drehmomente* auf Deinen Körper ungleich Null, würdest Du plötzlich einen Salto machen!

Definition: Ein Körper befindet sich dann im ***mechanischen Gleichgewicht***, wenn sowohl die Summe aller *Kräfte* auf den Körper gleich Null ist, als auch die Summe aller *Drehmomente* auf den Körper gleich Null ist:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}; \quad \sum_i \boldsymbol{\Gamma}_i = \mathbf{0}$$

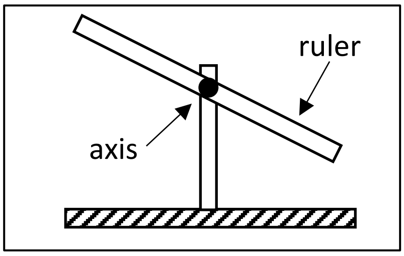


By APN MJM - Own work, CC BY-SA 3.0, http://gourl.gr/csp3

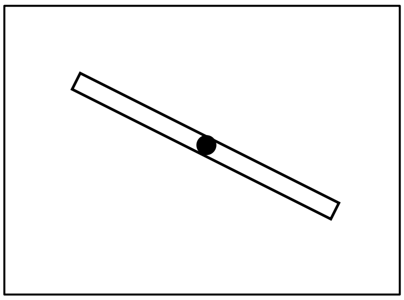
Diese Idee ist bei vielen Alltagssituationen wichtig.

Definition: Das ***Massenzentrum*** eines mechanischen Systems ist der einzige Punkt, an dem wir das System schieben können, ohne es zu drehen. Schaue Dir zum Beispiel das Bild rechts an, wo ein Finger das Spielzeug an einer ganz bestimmten Stelle nach oben schiebt, die das Spielzeug stützt, ohne dass es vom Finger kippt.

Es gibt eine Drehachse, um die das Nettodrehmoment verschwindet

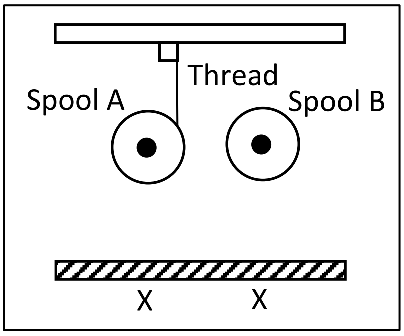


1. In der Abbildung rechts befestigen wir ein Lineal in seiner Mitte an einer Achse, um die es sich drehen kann. Dann halten wir das Lineal wie gezeigt schräg und lassen es dann aus dem Ruhezustand los. Sage die Bewegung des Lineals voraus, nachdem wir es losgelassen haben, und erkläre Deine Argumentation.
2. Ist die Winkelbeschleunigung des Lineals *im* Uhrzeigersinn, *gegen* den Uhrzeigersinn oder *Null*? Erkläre, woher Du das weißt.
3. Was sagt Dir Deine Antwort über das Nettodrehmoment am Lineal um die Achse?
4. Welche Richtung hat die Beschleunigung des Massenschwerpunkts des Lineals? Falls $\boldsymbol{a}_{cm} = \mathbf{0}$, gib dies explizit an. Erkläre, woher Du das weißt.
5. Was sagt Dir Deine Antwort über die Nettokraft, die auf das Lineal wirkt?
6. Zeichne Vektoren in das Diagramm rechts, um ein Freikörperdiagramm für das Lineal zu erstellen, nachdem es aus der Ruhe losgelassen wurde. Zeichne jede Kraft an dem Punkt, an dem sie ausgeübt wird. Beschrifte jede Kraft nach Typ, Objekt und Autor.



7. Diese Art von Diagramm wird als ***erweitertes Freikörperdiagramm*** bezeichnet. Stimmt der Punkt, an dem Du die Gravitationskraft in Deinem Diagramm eingefügt hast, mit Deinem Wissen über das Nettodrehmoment um die Achse überein? Begründe.
8. Wie würde sich Dein Freikörperdiagramm ändern, wenn das Lineal die doppelte Länge und die gleiche Masse wie zuvor hätte? Begründe.

Drehmoment unterscheidet sich von Kraft



9. Rechts halten wir zwei identische Baumwollspulen in gleicher Höhe über dem Boden. Der Baumwollfaden von Spule A ist an einer Stütze festgemacht, während Spule B nicht an einer Stütze festgemacht ist. Wir markieren auf dem Boden direkt unter jeder Spule ein „X". Angenommen, der Faden ist masselos. Wir lassen beide Spulen gleichzeitig aus dem Ruhezustand los. Zeichne unten ein erweitertes Freikörperdiagramm für jede Spule zu einem Zeitpunkt, unmittelbar *nachdem* wir sie losgelassen haben, aber *bevor* sie auf dem Boden aufschlagen:

Erweitertes Freikörperdiagramm für Spule A	Erweitertes Freikörperdiagramm für Spule B

10. Trage in jedes Diagramm die Richtung des Nettodrehmoments um die Mitte der Spule ein. Falls dieser Null ist, gib dies explizit an. Erkläre deine Argumentation.
11. Sage voraus, welche Spule zuerst den Boden berührt. Erkläre, inwiefern Deine Antwort mit Deinen erweiterten Freikörperdiagrammen übereinstimmt.
12. Sage voraus, ob Spule A links, rechts oder gerade auf dem „X“ auf dem Boden auftrifft. Erkläre, inwiefern Deine Antwort mit Deinen erweiterten Freikörperdiagrammen übereinstimmt.
13. Beschreibe das Verhältnis der Nettokraft zu den Einzelkräften in einem Freikörperdiagramm, wenn diese Kräfte an verschiedenen Stellen des Objekts angewendet werden.
14. Schreibe das zweite Newtonsche Gesetz für jede Spule in Bezug auf die Masse der Spule m, die Beschleunigung a_{cm} ihres Massenzentrums und die verschiedenen Einzelkräfte auf die Spule auf.

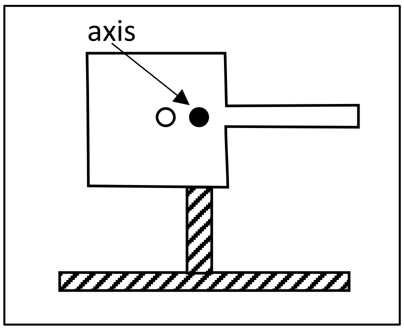
Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

- [Wie berechne ich die Position des Massenzentrums?]

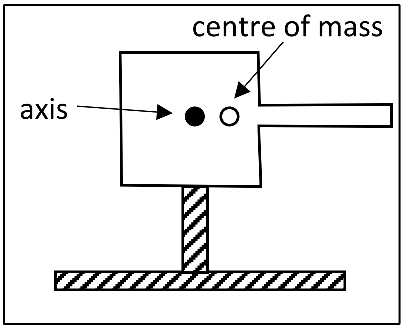
Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt *gemeinsam*!

Massenzentrum ist der Punkt, um den Nettodrehmoment verschwindet

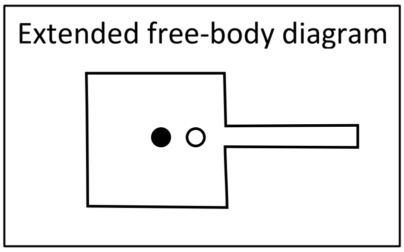
15. Das rechts abgebildete exzentrisch geformte Brett hat eine gleichmäßige Massendichte und zwei kleine Löcher darin. Zunächst hängen wir das Brett an einer Achse durch das *rechte* Loch, das sich am *Massenzentrum* des Bretts befindet. Wir halten das Brett in der gezeigten Position in Ruhe und lassen es dann los. Sage die Bewegung des Bretts voraus, nachdem wir es aus dem Ruhezustand losgelassen haben. Begründe.



16. Beschreibe die *Winkelbeschleunigung* des Bretts und welches Verhalten Dir dies sagt.
17. Was sagt Dir Deine Antwort über das *Nettodrehmoment* um die Achse? Begründe.
18. Beschreibe die *Beschleunigung* des Bretts und welches Verhalten Dir dies sagt.
19. Was sagt Dir Deine Antwort über die *Nettokraft*, die auf das Brett einwirkt? Begründe.
20. Stelle Dir nun vor, dass wir das Brett an einer Achse durch das Loch *links* vom Massenzentrum hängen. Sage die Bewegung des Bretts voraus, nachdem wir es aus dem Ruhezustand losgelassen haben. Begründen.



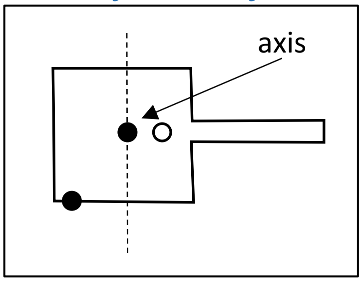
21. Zeichne und beschrifte im Diagramm rechts ein erweitertes Freikörperdiagramm für das Brett, kurz nachdem wir es losgelassen haben. Setze den Fuß jedes Kraftpfeils auf den einzelnen Punkt, an dem diese Kraft angreift.
22. Erkläre, wie Dein erweitertes Freikörperdiagramm Deine vorherige Vorhersage der Bewegung des Bretts unterstützt.



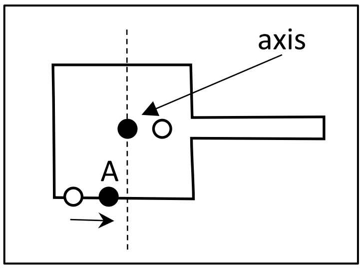
Hinweis: Unsere Erkenntnisse in diesem Abschnitt gelten nur dann exakt, wenn zwischen dem Brett und seiner Drehachse keine Reibung besteht. Von nun an gehen wir in diesem Kurs davon aus, *dass alle Rotationsachsen reibungsfrei sind*.

Das Massenzentrum hilft uns, den Schwerpunkt eines Objekts zu finden

23. Stelle Dir nun vor, die Drehachse des Brettes bleibt durch das *linke* Loch (also *nicht* durch das Massenzentrum). In der Abbildung rechts kleben wir ein Stück Ton auf die untere linke Seite des Brettes, so dass das Brett im Ruhezustand bleibt, wenn wir es waagerecht an der Achse hängen lassen. Befindet sich das Massenzentrum des Gesamtsystems (Brett+Ton) *links*, *rechts* oder *entlang* der vertikalen Linie durch die Achse? Begründe.



24. Angenommen, wir bewegen das Tonstück an eine neue Position (Punkt A) näher an der Achse. Sage voraus, ob das Board im Gleichgewicht bleiben würde. Begründe.
25. Würde sich die Gesamtmasse links vom Drehpunkt ändern, wenn wir den Ton zum Punkt A bewegen?
26. Angenommen, wir bringen das Tonstück an seine ursprüngliche Position zurück und zusätzlichen Ton hinzugefügen. Bleibt das Brett dann im Gleichgewicht?



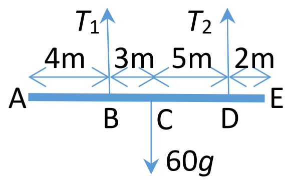
27. Gibt es irgendeine Stelle an der Unterkante des Brettes, wo wir dieses größere Stück Ton platzieren könnten, damit das Brett sich wieder im Gleichgewicht befindet? Wenn ja, ist die neue Position *näher an* oder *weiter weg von* der Drehachse?

Generalise your findings so far …

28. Ist es möglich, ein System so zu verändern, dass es nicht mehr im Gleichgewicht ist, *während die Gesamtmasse zu beiden Seiten seiner Drehachse unverändert bleibt*?
29. Ist es möglich, ein System im Gleichgewicht zu halten, *während wir die Masse auf einer Seite seiner Drehachse ändern*?
30. Um zu entscheiden, ob ein System im Gleichgewicht ist, reicht es, wenn wir die Gesamtmasse auf jeder Seite seiner Drehachse kennen?

Fuß fassen

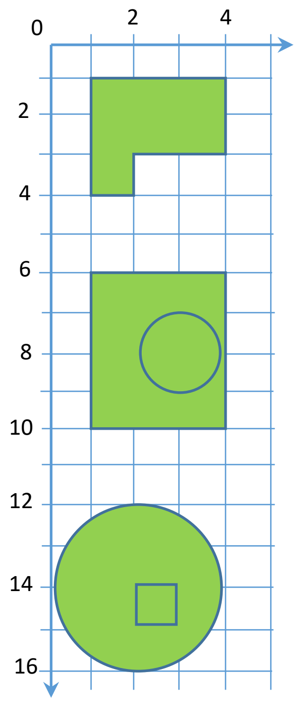
31. Ein Mädchen mit Masse 40 kg sitzt 1.5 m vom Drehpunkt einer Wippe entfernt. Zeige, dass ihr Bruder (Masse 50 kg) 1.2 m vom Drehpunkt sitzen muss, damit die Wippe im Gleichgewicht ist.
32. Was bedeutet der Begriff *Kräftepaar*?
33. Ein gleichförmiger 14 m, 60 kg Balken (AE, rechts) wird von zwei Seilen an den Stellen B und D unterstützt. Was ist die Zugkraft in den Seilen?

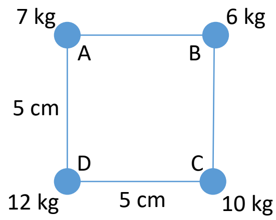


34. Was bedeutet der Ausdruck *ungleichförmiger Balken*?
35. Eine gleichförmige Leiter mit Länge 6m steht auf rauem Boden und lehnt an einer glatten, vertikalen Wand mit Winkel 20° dazu. Zeichne ein Diagramm der Situation und nenne alle Annahmen, die Du voraussetzt.
36. Drei Teilchen haben Massen $m_1 = 1\text{ kg}$, $m_2 = 2\text{ kg}$ und $m_3 = 3\text{ kg}$. Bestimme das Massenzentrum der drei Massen, wenn sie sich befinden bei: (a) $(1{,}0), (2{,}0), (3{,}0)$; (b) $(0{,}3), (0{,}2), (0{,}1)$; (c) $(3{,}4), (3{,}1), (1{,}0)$.

37. Vier Teilchen an den Koordinaten $A(0,0)$, $B(0,4)$, $C(5,4)$, $D(5,0)$ haben jeweilige Massen m kg, $2m$ kg, $3m$ kg und 12 kg. Berechne m im Falle, dass sich das Massenzentrum des Systems bei $(3.5,2)$ befindet.

38. Finde das Massenzentrum der drei Laminellen im Diagramm rechts. Die zweite und die dritte bestehen jeweils aus zwei zusammen geklebten Schichten: einer großen und einer kleinen.





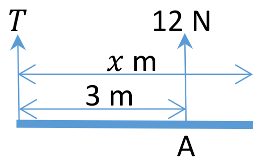
39. Einem leichten quadratischen Rahmen (links) werden Massen an jeder Ecke festgemacht. (a) Wie weit ist das Massenzentrum von den Seiten AB und AD? (b) Welchen Winkel zur Vertikalen macht die Seite AB, wenn wir den ganzen Rahmen vom Eckpunkt A frei hängen lassen?

Beine strecken

40. Ein Fahrer wechselt einen platten Reifen. Das erforderliche Drehmoment um die Schraubenmutter los zu schrauben ist 60 Nm. Er benützt einen 0.4 m langen doppelendeten Radmutterschlüssel. Welche Kraft muss er an beiden Enden des Schlüssels anwenden?

41. Ein Turmspringer mit Masse 60 kg steht am Ende eines Sprungbretts 2 m vom Drehpunkt entfernt. Sein Gewicht wird ausgeglichen von einer Feder unterm Sprungbrett 30 cm von der anderen Seite des Drehpunkts entfernt. Wieviel Kraft muss die Feder aufbringen?

42. Ein horizontaler, gleichförmiger Balken (rechts) hat Länge x und Gewicht 18 N und wird von zwei vertikalen Schnüren im Gleichgewicht gehalten. Die Zugkraft in der Schnur bei A ist 12 N; die Zugkraft in der anderen Schnur ist T. (a) Zeige, dass $x = 4\text{ m}$. (b) Berechne T.



43. Eine gleichförmige Leiter hat Länge 4.2 m und Gewicht 180 N. Sie lehnt an einer glatten Wand auf rauem Boden im Winkel θ zum Boden, wobei $\tan\theta = \frac{8}{11}$. Ryan steht auf der Leiter ein Drittel der Leiterlänge vom Fuß hoch. Die normale Reaktionskraft an der Wand ist 490 N. Die Reibung am Fuß reicht gerade noch aus, dass das System im Gleichgewicht ist. Berechne Ryans Masse und den Reibungskoeffizienten zwischen Boden und Leiter auf 2 signifikante Stellen genau.

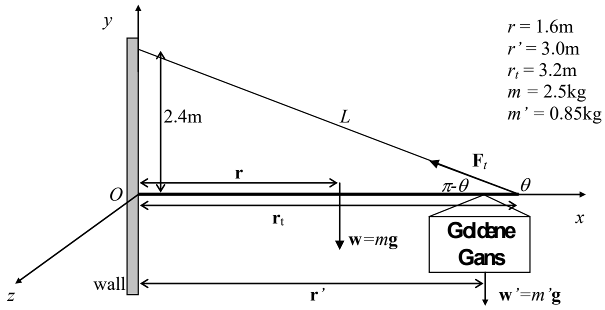
Numerische Ergebnisse

- 33: [367.5 N; 220.5 N]
- 36: [$(2\frac{1}{3},0)$; $(0,1\frac{2}{3})$; $(2,1)$]
- 37: [3 kg]
- 38: [$(2.21,2.36)$; $(8,2.60)$; $(14.0,2.04)$]
- 39: [(a) 3.14 cm; 2.29 cm; (b) 54°]
- 40: [150 N]
- 41: [3924 N]
- 42: [(b) 6 N]
- 43: [82 kg; 0.50]

Konstruktionsübung: *Prüfungsvorbereitung*!

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

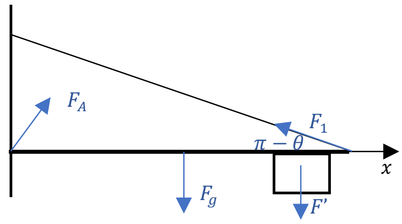
Ein starrer Balken mit Masse 2.5 kg und Länge 3.2 m wird am linken Ende durch eine Angel an der vertikalen Außenwand eines Pubs festgemacht. Er wird durch ein Stahlkabel horizontal festgehalten, das das rechte Ende des Balkens mit einem Punkt 2.4 m oberhalb der Angel an der Wand verbindet. Ein Namensschild mit Masse 0.85 kg hängt 0.20 m vom rechten Ende des Balkens. Wieviel Zugkraft muss das Kabel aushalten?



Musterlösung:

Verfolgen

An einer Wand ist ein Balken mit Masse $m = 2.5$ kg und Länge $r_t = 3.2$ m befestigt. Ein Stahlkabel, welches mit dem Abstand $h = 2.4$ m oberhalb des Balkens an der Wand und dem Winkel $\pi - \theta$ am Balken befestigt ist, dient zur Unterstützung. An dem Balken hängt außerdem mit Abstand $r' = 3.0$ m ein Namenschild mit Masse $m' = 0.85\,kg$. Gesucht ist die Zugkraft F_1, die das Stahlkabel aushalten muss. (Annahme: $g = 9.81\ \mathrm{ms}^{-2}$)



Engagieren

Da das ganze Konstrukt statisch ist und sich nicht bewegt, gibt es auch keine Beschleunigung in eine Richtung, und auch keine Winkelbeschleunigung. In diesem Fall herrscht mechanisches Gleichgewicht: die Summe aller Kräfte ist Null ($\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$) und die Summe aller Drehmomente ist auch Null ($\sum_i \mathbf{\Gamma}_i = \mathbf{0}$). Wir verwenden die Drehmomente um F_1 zu ermitteln. Dazu verwenden wir zusätzlich die Definition des Drehmoments: $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = r\,F \sin(\theta)\,\mathbf{e}_\perp$. Wir wählen die Angel am linken Ende als Drehzentrum, damit die Kraft $\boldsymbol{F}_A$ an der Angel nicht zum Drehmoment beiträgt

Abstrahieren

1. Bilde den Tangens um den Winkel $\pi - \theta$ zu berechnen.
2. Stelle die Gleichgewichts-Gleichung für das Drehmoment auf und berechne F_1.

Anwenden

1. Wir berechnen den Winkel:

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{h}{r_t} = \frac{2.4\ \mathrm{m}}{3.2\ \mathrm{m}} \Longrightarrow \pi - \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2.4\ \mathrm{m}}{3.2\ \mathrm{m}}\right) \approx 36.87°$$

2. Aus dem mechanischen Gleichgewicht folgt: $\sum_i \mathbf{\Gamma}_i = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{\Gamma}' + \mathbf{\Gamma}_g = 0$.
   F_N kann in diesem Fall vernachlässigt werden, da die Kraft direkt am Drehpunkt anliegt und somit keinen Einfluss hat. Wir ermitteln die einzelnen Drehmomente mit der Formel $\mathbf{\Gamma} = r\,F \sin(\theta)\,\mathbf{e}_\perp$. Mit Hilfe der „rechten-Hand" Regel bestimmen wir die Drehrichtung um die z-Achse:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{\Gamma}' + \mathbf{\Gamma}_g = 0 \\
\Longrightarrow\quad & r_t \sin(36.87°)\ F_1\,\hat{\mathbf{z}} + r'\ \sin(90°)\,F'(-\hat{\mathbf{z}}) + r\ \sin(90°)\,F_g(-\hat{\mathbf{z}}) = 0 \\
\Longrightarrow\quad & r_t \sin(36.87°)\ F_1\,\hat{\mathbf{z}} = r' \sin(90°)\,F'\,\hat{\mathbf{z}} + r\ \sin(90°)\,F_g\,\hat{\mathbf{z}} \\
\Longrightarrow\quad & F_1 = \frac{(r'\,F' + r\,F_g)\,g}{r_t \sin(36.87°)} = \frac{(3.0\ \mathrm{m}\ 0.85\ \mathrm{kg} + 1.6\ \mathrm{m}\ 2.5\ \mathrm{kg})\ 9.81\ \mathrm{ms}^{-2}}{3.2\ \mathrm{m}\sin(36.87°)} = \underline{33.47\ \mathrm{N}}
\end{aligned}$$

Ergebnis verfolgen

Der Balken hat Masse ca. $2.5 \mathrm{~kg}$ und Schild ca. $850 \mathrm{~g}$. F_1 gleicht ungefähr diese Werte aus.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Eine gleichförmige Leiter hat Länge $4.2 \mathrm{~m}$ und Gewicht $180 \mathrm{~N}$. Sie lehnt an einer glatten Wand im Winkel θ zum rauen Boden, wobei $\tan\theta = \frac{8}{11}$. Ryan steht auf der Leiter ein Drittel der Leiterlänge vom Fuß hoch. Die normale Reaktionskraft an der Wand ist $490 \mathrm{~N}$. Die Reibung am Fuß reicht gerade noch aus, dass das System im Gleichgewicht ist. Berechne Ryans Masse und den Reibungskoeffizienten zwischen Boden und Leiter.