

Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 17: Wie berechnen wir Funktionen?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du ...

- Instanzen einer Funktion erkennen, verallgemeinern und anwenden.
- Manipulationen und Inversionen anwenden, um Gleichungen in bekannten Funktionen zu lösen.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

Funktion frisst Domänenargument und spuckt sein Codomänenbild aus

<p>$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f: x \mapsto 2x - 3$ (1:1)</p>	<p>Invertierbare Funktion: $f(x) = 2x - 3$</p>
<p>$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+; g: x \mapsto x^2$ (2:1)</p>	<p>Nicht-invertierbare Funktion: $g(x) = x^2$</p>
<p>$h: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}; h: x \mapsto \sqrt{x}$ (1:2)</p>	<p>Abbildung (<u>keine</u> Funktion!): $h(x) = \sqrt{x}$</p>

- Eine **Abbildung** verwandelt eine Zahl (deren **Argument**) in eine andere Zahl (das **Bild** dieses Arguments). Eine Abbildung kann jedoch auch ein Argument in mehrere verschiedene Bildelemente umwandeln – wie z.B. die 1: 2 Abbildung h oben.
- Die Menge aller möglichen Argumente einer Abbildung wird als seine **Domäne** bezeichnet; die Menge aller möglichen Bilder heißt ihre **Codomäne**.
- Im Gegensatz dazu ist eine **Funktion** eine Abbildung, die für jedes Argument nur ein Bildelement erzeugt – wie die Funktion g oben.
- Aus ihrem Argument x erzeugt g das Bildelement x^2 . Aus ihrem Argument x erzeugt h das Bild \sqrt{x} . Wenn wir die beiden Funktionen zusammensetzen, erhalten wir die **Identitätsfunktion** I , die ihr Argument unverändert zurückliefert: $I(x) \equiv x$. In diesem Fall sagen wir, dass h die **Umkehrung** (oder die **Inverse**) von g ist. In diesem Fall gilt:

$$(g \circ h)(x) \equiv g(h(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$$

Oder mit anderen Worten:

$$h = g^{-1}, g = h^{-1} \text{ und } g \circ h = h \circ g = I$$

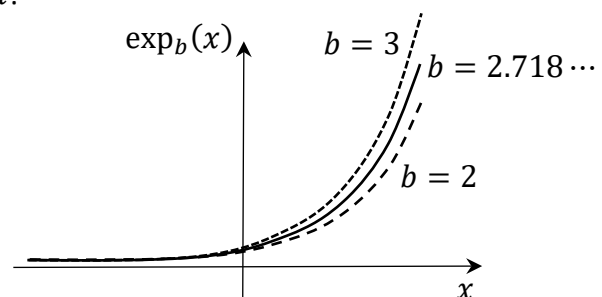
- Die Funktion g ist jedoch 2:1. Das bedeutet, dass für zwei verschiedene Argumente dasselbe Bild erzeugt wird (beispielsweise ist 4 das Bild von 2 und -2). Die Umkehrung von g ist also keine Funktion, und deswegen sagen wir, dass g **nicht invertierbar** ist.
- Die Funktion f ist dagegen 1: 1 und somit **invertierbar**.

Es gibt viele Exponentialfunktionen, aber nur eine spezielle

Eine **Exponentialfunktion** ist jede Funktion, deren Variablenargument als Exponent auftritt:

$$\exp_b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+; \quad \exp_b: x \mapsto a^x; \quad \exp_b(x) \equiv a^x$$

1. Was ist der Wert von $\exp_2(x)$ für $x \in \{0,1,2,3,-1,-2,-3\}$?
2. Was ist der Wert von $\exp_3(x)$ für $x \in \{0,1,2,3,-1,-2,-3\}$?
3. Ist die Funktion \exp_b 1: 1, n : 1 oder 1: n ?
4. Ist die Funktion \exp_b invertierbar?
5. Nehmen wir an, dass $b > 0$, und schaue Dir den Graphen rechts an. Wenn der Wert von $\exp_b(x)$ größer wird, wird die Steigung der Kurve $\exp_b(x)$ *steiler*, *flacher* oder *bleibt sie gleich*?
6. Wenn der Wert von b größer wird, wird die Steigung der Kurve $\exp_b(x)$ *steiler*, *flacher* oder *bleibt sie gleich*?



Die Zahl b heißt die **Basis** der Exponentialfunktion. Wenn sich die Basis der Kurve $\exp_b(x)$ ändert, kann die Steigung entweder größer oder kleiner als der Wert der Kurve werden. Tatsächlich gibt es nur einen speziellen Basis-Wert, den wir $e = 2.718 \dots$ nennen, bei dem der Wert und die Steigung der Kurve sich genau gleich sind:

$$b = 2: \quad \frac{d}{dx}(\exp_2(x)) < \exp_2(x)$$

$$b = 3: \quad \frac{d}{dx}(\exp_3(x)) > \exp_3(x)$$

$$b = e: \quad \frac{d}{dx}(\exp_e(x)) = \exp_e(x)$$

Wir verwenden die Exponentialfunktion $\exp_e(x)$ zur Basis e so oft, dass wir sie **die Exponentialfunktion** nennen und einfach als $\exp(x) \equiv \exp_e(x)$ schreiben. Die Exponentialfunktion beschreibt unkontrolliertes biologisches Wachstum (falls $b > 0$) oder unkontrollierten Zerfall (falls $b < 0$).

Da jede Exponentialfunktion 1:1 ist, können wir sie invertieren. Wir nennen die Umkehrung der Exponentialfunktion die **Logarithmusfunktion**: $\log_b(x) \equiv \exp_b^{-1}(x)$. In diesem Fall gilt also:

$$\log_b(\exp_b x) = x = \exp_b(\log_b x)$$

Oder:

$$\log_b \equiv \exp_b^{-1}$$

Wir nennen den Logarithmus zur Basis e der **natürliche Logarithmus**:

$$\ln(x) \equiv \log_e(x) \equiv \exp^{-1}(x)$$

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm Treffen!*

- [Werte aus der Domäne werden auf Werte im Wertebereich abgebildet](#)
- [Lineare Kombinationen sind eine besonders einfache Familie von Funktionen](#)
- [Funktionen können 1:1 oder n:1 sein](#)
- [Funktionen können komponiert werden](#)
- [1:1 Funktionen haben eine Inverse \(Umkehrfunktion\)](#)
- [Berechne die Inverse durch Algebra](#)
- [Wir können die Inverse prüfen durch Komposition](#)
- [Es gibt vier übliche Transformationen von Graphen](#)
- [Die Graphen \$y = a^x\$ und \$y = a^{-x}\$ zeigen exponentielles Wachstum bzw. Zerfall](#)
- [\$\ln\(x\)\$ ist die inverse Funktion von \$e^x\$](#)
- [Benütze inverse Funktionen und Log-Regeln um Gleichungen zu lösen](#)
- [Wir können Funktionen durch Komposition transformieren](#)

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt *gemeinsam!*

Fuß fassen

7. Nenne den Wertebereich der folgenden Abbildungen und bestimme, ob sie eine Funktion ist. Wenn, dann gib an, ob sie 1:1 oder n:1 ist; wenn nicht, warum nicht? (a) $f(x) = x^2 - 16$; ($x \geq 0$); (b) $f(x) = \sqrt{x}$; ($x \in \mathbb{R}$); (c) $f(x) = x^2 - 7x + 10$; ($x \in \mathbb{R}$); (d) $f(x) = \frac{1}{x-2}$; ($x \in \mathbb{R}$).
8. Für jedes Funktionspaar f und g , finde $f \circ g(2)$, $g \circ f(1)$ und $f \circ g(x)$: (a) $f(x) = \frac{3}{x}$; ($x > 0$) und $g(x) = 2x + 3$; ($x \in \mathbb{R}$); (b) $f(x) = 3x^2$; ($x \geq 0$) und $g(x) = x + 4$; ($x \in \mathbb{R}$).
9. Eine 1:1 Funktion f hat Domäne $x \in \mathbb{R}$ und Wertebereich $f(x) \geq 3$. Hat f eine Inverse, und wenn, was ist ihre Domäne und ihr Wertebereich?
10. Benütze Algebra um die Inverse der Funktion $f(x) = \sqrt{2x - 4}$, $x \geq 2$ zu finden. Was ist ihre Domäne und ihr Wertebereich?
11. Für die Funktion $f(x) = 2x - 1$ $\{x \in \mathbb{R}\}$ skizziere den Graph von (a) $|f(x)|$ und (b) $f(|x|)$. (c) Löse die Gleichung $|2x - 1| = 5$.
12. Löse die Gleichung $|2x + 1| = |x + 4|$.

13. Plote diese Graphen auf denselben Achsen für $-2 \leq x \leq 2$: (a) $y = 4e^x$; (b) $y = 4e^{-x}$; (c) $y = 4 \ln x$; (d) $y = \ln 4x$.
14. Berechne x auf 4 Dezimalstellen genau, wenn (a) $e^{2x} = 6$; (b) $\ln(x + 3) = 0.75$; (c) $3e^{-4x+1} = 5$; (d) $\ln x + \ln 5 = \ln 4$.
15. Löse exakt: (a) $\ln(2x - 7) + \ln 4 = -3$; (b) $2e^{2x} + e^x = 3$.
16. Skizziere diese Graphen und kennzeichne alle wichtigen Punkte: (a) $y = 2 - e^{x+1}$; (b) $y = \ln 2x + 1$; (c) $y = \ln(x + 5)$.

Beine strecken

17. Beschreibe in Worten was passiert, wenn die Kurve $y = x^3$ zur Kurve $y = (x - 1)^3 + 4$ transformiert wird.
18. Gegeben seien: $f(x) = x^2 - 3$, $x \in \mathbb{R}$ und $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. (a) Finde einen Ausdruck für $g \circ f(x)$; (b) Löse die Gleichung $g \circ f(x) = \frac{1}{6}$.
19. Gegeben seien: $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$ und $g(x) = \sqrt{3x - 2}$, $x \geq \frac{2}{3}$. Finde (a) $f \circ g(6)$; (b) $g \circ f(2)$; (c) $g^{-1}(x)$; (d) $f \circ g^{-1}(x)$.
20. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{x+5}$ mit Domäne $x > -5$. (a) Was ist der Wertebereich von $f(x)$? (b) Finde die Inverse $f^{-1}(x)$; (c) Was ist die Domäne und der Wertebereich von $f^{-1}(x)$? (d) Skizziere $f(x)$ und $f^{-1}(x)$ im selben Achsensystem.
21. (a) Angenommen, dass $6e^x = 3$, was ist der exakte Wert von x ? (b) Finde die exakten Lösungen der Gleichung $e^{2x} - 8e^x + 7 = 0$; (c) Angenommen, dass $4 \ln x = 3$, was ist der exakte Wert von x ? (d) Löse diese Gleichung exakt: $\ln x + \frac{24}{\ln x} = 10$.
22. (a) Der Punkt $(a, 1)$ liegt auf der Kurve $C: y = \ln(4x - 3)$; was ist der Wert von a ? (b) C ist nur für $x > b$ definiert; was ist der Wert von b ? (c) Skizziere und beschrifte C .

Numerische Ergebnisse

- 6: [(a) $[-16, +\infty)$; 1:1; (b) $[-2.25, +\infty)$; n :1; (c) $[0, +\infty)$; keine Funktion; (d) $\mathbb{R} \setminus 0$; keine Funktion]
- 7: [(a) $\frac{3}{7}$; 9; $\frac{3}{2x+3}$; (b) 108; 7; $3(x+4)^2$]
- 9: [$f^{-1}(x) \equiv \frac{x^2}{2} + 2$]
- 10: [(c) 3; -2]
- 11: [$x \in \{-\frac{5}{3}, 3\}$]
- 13: [(a) 0.8959; (b) -0.8830; (c) 0.1223; (d) 0.8000]
- 14: [(a) $x \in \{\frac{e^3+28}{8}, \frac{1}{8e^3} + \frac{7}{2}\}$; (b) 0]
- 17: [(a) $\frac{1}{x^2-3}$; (b) ± 3]
- 18: [(a) 16; (b) $\sqrt{10}$; (c) $\frac{x^2+2}{3}$; $2^{\frac{x^2+2}{3}}$]
- 19: [(a) \mathbb{R}^+ ; (b) $\frac{1}{x} - 5$; $(-5, \infty)$; (c) $(0, +\infty)$, $(-5, +\infty)$]
- 20: [(a) $\ln 0.5$; (b) 0; $\ln 7$; (c) $e^{0.75}$; (d) e^4 ; e^6]
- 21: [(a) 1.43; (b) 0.75]

Konstruktionsübung: Prüfungsvorbereitung!

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Sei $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $g(x) = \sqrt{3x - 2}$, $x \geq \frac{2}{3}$. Löse die Gleichung $(f \circ g^{-1})(x) = 1$.

Musterlösung:

Verfolgen

Die gegebene Gleichung ist eine Komposition der zwei Funktionen $f(x)$ und $g^{-1}(x)$. Das bedeutet, dass die Funktion $f()$ eine andere Funktion $g^{-1}(x)$ anstatt eines x -Arguments verwendet. $g^{-1}()$ ist die inverse Funktion von $g(x)$.

$$f\left(g^{-1}(x)\right)$$

Engagieren

In diesem Fall ist f die äußere Funktion und g^{-1} die innere Funktion. Um die Gleichung zu lösen, müssen wir erst die inverse Funktion von $g(x)$ bilden und sie dann in die äußere Funktion einsetzen.

Abstrahieren

1. Bilde $g^{-1}(x)$ indem wir x und y vertauschen.
2. Bilde die Komposition $f \circ g^{-1}$.
3. Löse die Gleichung $(f \circ g^{-1})(x) = 1$.

Anwenden

1. Wir bilden $g^{-1}()$, indem wir x und y in der Definition von $g()$ vertauschen und nach y auflösen:

$$\begin{aligned}x &= g(y) = \sqrt{3y - 2} \\ \Rightarrow x^2 &= 3y - 2 \\ \Rightarrow x^2 + 2 &= 3y \\ \Rightarrow g^{-1}(x) &= y = \frac{x^2 + 2}{3}\end{aligned}$$

2. Wir bilden $(f \circ g^{-1})(x)$ indem wir die Funktion $g^{-1}(x)$ als Argument von $f()$ einsetzen:

$$(f \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{\frac{x^2 + 2}{3}} = \frac{3}{x^2 + 2}$$

Wir lösen die Gleichung:

$$\begin{aligned}(f \circ g^{-1})(x) &= 1 \\ \Rightarrow \frac{3}{x^2 + 2} &= 1 \\ \Rightarrow 3 &= x^2 + 2 \\ \Rightarrow x^2 &= 1 \\ \Rightarrow x &= \underline{\underline{\pm 1}}\end{aligned}$$

Ergebnis verfolgen

Wenn wir für x die Werte $1, -1$ in die Funktion $g^{-1}(x)$ einsetzen und das Ergebnis wiederum in $f(x)$ einsetzen, bekommen wir als Funktionswert 1 raus. Das stimmt mit unserem Ergebnis überein.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Sei $f(x) = 2(x^2 - 6)$, $x \in \mathbb{R}$ und $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Löse die Gleichung $(g \circ f)(x) = \frac{1}{6}$.