

# Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

## Module 01: Mathematical-physical methods

### Thema 18: Wo kommen Kräfte eigentlich her?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du ...

- Die Konzepte Ladung und elektrisches Feld erkennen und beschreiben;
- Dich mit Wechselwirkungen zwischen den Konzepten der Ladung und des elektrischen Felds engagieren.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt vorm Treffen!

*Ladung ist die Lösung eines praktischen Rätsels*

**Merke:** Physik entsteht aus der Anwendung der Mathematik in praktischen Situationen. Daher ist es sehr wichtig, dass Du die folgenden einfachen Experimente selber durchführst!

1. Schneide ein etwa 20 cm langes Stück Klebeband ab und falte die Enden so um, dass sie bequeme, nicht klebende „Griffe“ bilden. Drücke das Klebeband über seine gesamte Länge auf eine glatte, unlackierte Oberfläche wie eine Holztischplatte. Ziehe dann das Klebeband vom Tisch ab und hänge es an einer Unterlage wie der Tischkante auf.
2. Beschreibe das Verhalten des Bandes, wenn Du Gegenstände auf es zu bringst (z. B. eine Hand oder einen Bleistift).
3. Mache ein weiteres Stück Klebeband wie zuvor beschrieben und führe es zum ersten. Beschreibe Deine Beobachtungen.
4. Wie beeinflusst der Abstand zwischen den beiden Bändern die Interaktion zwischen ihnen?
5. Drücke ein neues Band auf den Tisch und schreibe ein „U“ darauf (wie Unten). Drücke dann ein anderes Band auf das U-Band und beschrifte es mit „O“ (wie Oben). Wiederhole diesen Vorgang für zwei weitere Bänder, die ebenfalls mit „O“ und „U“ gekennzeichnet sind.
6. Ziehe nun das erste OU-Bandpaar als Einheit vom Tisch ab, trenne dann die O- und U-Bänder und hänge sie jeweils separat an die Tischkante. Ziehe als nächstes das zweite OU-Paar ab und trenne es und beschreibe die Interaktion zwischen den folgenden Klebebandpaaren, wenn Du eines auf das andere zu bringst:

Zwei O-Bänder	Zwei U-Bänder	Ein O- und ein U-Band

7. Wir sagen, dass die Bänder **elektrisch geladen** sind, wenn sie auf diese Weise miteinander interagieren. Ist es möglich, dass es nur eine Art von Gebühr gibt? Falls

nicht, wie viele verschiedene Ladungsarten benötigst Du mindestens um Deine Beobachtungen zu erklären?

Wir nennen diese Ladungen **positiv** (+) und **negativ** (-). Wir können wählen, ob wir das O-Band oder das U-Band „positiv“ nennen wollen, aber sobald wir diese Wahl getroffen haben, bestimmt sie die Art der Ladung für alle weiteren Objekte im Universum.

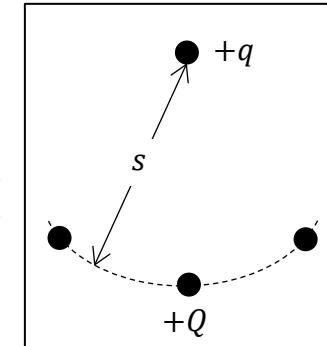
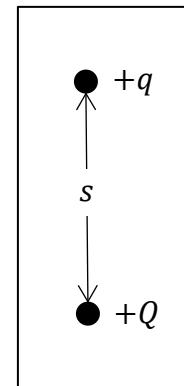
### *E-Kraft steigt mit Ladung, sinkt mit Abstand*

Eine **Punktladung** ist ein geladenes Objekt, das so klein ist, dass die Ladung so behandelt werden kann, als ob sie alles an einem einzigen Punkt gesammelt würde.

**Coulombs Gesetz** besagt, dass die elektrische Kraft  $\mathbf{F}_E$  zwischen zwei Punktladungen entlang derjenigen Geraden wirkt, die die beiden Punkte verbindet. Der Betrag  $F_E$  dieser elektrischen Kraft auf jede der beiden Punktladungen ist proportional zum Produkt der beiden Ladungen ( $Q$  und  $q$ ) und *invers proportional* zum Quadrat des Abstands ( $r$ ) zwischen den beiden Punktladungen:

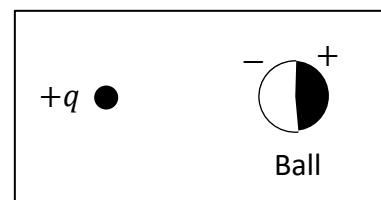
$$F_E \propto \frac{Qq}{r^2}$$

8. Angenommen, wir halten zwei positive Punktladungen  $+q$  und  $+Q$  (wobei  $|Q| > |q|$ ) fest und im Abstand  $s$  voneinander. Gib anhand Deiner obigen Beobachtungen im Diagramm rechts die Richtung der elektrischen Kraft an, die jede Ladung auf die andere ausübt.
9. Ist die Kraft  $\mathbf{F}_{EqQ}$  auf die  $+q$ -Ladung durch die  $+Q$ -Ladung *größer*, *kleiner* oder *gleich* der Kraft  $\mathbf{F}_{EQq}$  auf die  $+Q$ -Ladung durch die  $+q$ -Ladung? Begründe.
10. Um welchen Faktor würde sich der Betrag der elektrischen Kraft  $\mathbf{F}_{EqQ}$  ändern, falls die Ladungen stattdessen einen Abstand von  $2s$  voneinander hätten?
11. Nun halten wir zwei weitere  $+Q$ -Ladungen fest im gleichen Abstand  $s$  von der  $+q$ -Ladung wie rechts gezeigt. Stimmst Du einem dieser beiden Studierenden zu, die die Nettokraft der  $+q$ -Ladung diskutieren?
  - Studierende 1: „*Die elektrische Nettokraft auf die  $+q$ -Ladung ist jetzt dreimal so groß wie zuvor, da jetzt drei positive Ladungen Kräfte auf sie ausüben.*“
  - Studierender 2: „*Ich glaube nicht. Die Kraft der  $+Q$ -Ladung links hebt die Kraft der  $+Q$ -Ladung rechts auf. Die elektrische Nettokraft ist die gleiche wie zuvor.*“
12. Gib die Richtung der elektrischen Nettokraft auf die  $+q$ -Ladung. Begründe.
13. Was kannst Du, wenn überhaupt, darüber sagen, wie sich der Betrag der elektrischen Nettokraft auf die  $+q$ -Ladung ändert, wenn die beiden zusätzlichen  $+Q$ -Ladungen hinzugefügt werden? Begründe.



### *Ladungen wirken auch auf ungeladene Leiter*

14. Eine kleine Kugel mit Null Nettoladung ist auf einer Seite positiv und auf der anderen Seite gleich negativ geladen. Wir platzieren den Ball in der Nähe einer positiven Punktladung, wie rechts gezeigt. Würde der Ball von der positiven Punktladung *angezogen, abgestoßen* oder von dieser *unbeeinflusst*? Begründe.
15. Ist Deine Antwort in Einklang mit Coulombs Gesetz?



16. Dies schlägt eine Erklärung der Anziehungskraft vor, die zwischen Deinem Stück Klebeband und einer ungeladenen Metallkugel gelten würde. Erkläre diese Anziehung, indem Du eine Skizze der Ladungsverteilung auf Band und Kugel zeichnest, bevor und nachdem wir sie aufeinander zugebracht haben.

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos vorm Treffen!

- Massen in einem G-Feld erleben eine Anziehungskraft ...

Newton schlug vor, dass Masse zwei Eigenschaften besitzt: Trägheit und **Gravitation**. die Masse  $M$  der Erde verursache ein **G-Feld**, das wiederum auf die Masse  $m$  meines Körpers einwirkt. Dieses G-Feld ist ein Vektor  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ , der an jedem Ort  $\mathbf{r}$  überall um mich herum existiert, und mich mit einer **Gewichtskraft** zur Erdmitte hin zieht. Bei uns an der Erdoberfläche ist die G-Feldstärke  $\mathbf{g}(\mathbf{r}) \approx -9.8 \text{ ms}^{-2} \hat{\mathbf{r}}$ .

- ... und Ladungen in einem E-Feld erleben eine Kraft

Eine ähnliche Geschichte gilt für die Wirkung des **E-Felds**  $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  auf eine Ladung  $q$  am Ort  $\mathbf{x}$ . Wir nennen  $m$  bzw.  $q$  die **Kopplungskonstante** zwischen dem Feld und einem kleinen Probeteilchen (**Probemasse**  $m$  bzw. **Probeladung**  $q$ ). Dieses Probeteilchen ist letztendlich unser Messgerät zur Erkennung des Felds am Ort  $\mathbf{x}$ . Falls das Probeteilchen beschleunigt wird, wissen wir, dass es ein Feld gibt:

$$\mathbf{F}_g = m \mathbf{g}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{F}_e = q \mathcal{E}(\mathbf{x})$$

- Wir können das G-Feld aus Newtons Gravitationsgesetz berechnen ...

Schon im 17. Jahrhundert beschrieb Newton, wie wir das G-Feld einer großen **Quellmasse**  $M$  berechnen können, die sich am Ursprungspunkt befindet.

- ... und das E-Feld ebenso aus Coulombs Gesetz

Vierzig Jahre später formulierte Coulomb eine ähnliche Formel für das E-Feld einer großen **Quellladung**  $Q$ , die sich ebenso am Ursprungspunkt befindet:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}; \quad \mathcal{E}(\mathbf{r}) = \frac{kQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

wobei:  $G \approx 6.7 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$ ;  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9.0 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$

- Wir können Flughorizont und -geschwindigkeit eines Satelliten berechnen

Beide Feldarten liefern den Radius einer kreisförmigen Flughorizont mit Tempo  $v$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_r = -\frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}} &= -\frac{1}{m} \cdot \frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \left| \begin{aligned} \mathbf{a}_r &= -\frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \\ \Rightarrow r &= \frac{GM}{v^2} \quad \quad \quad \Rightarrow r &= -\frac{4\pi\epsilon_0 Q}{v^2} \cdot \frac{q}{m} \end{aligned} \right. \\ \Rightarrow r &= \frac{GM}{v^2} \end{aligned}$$

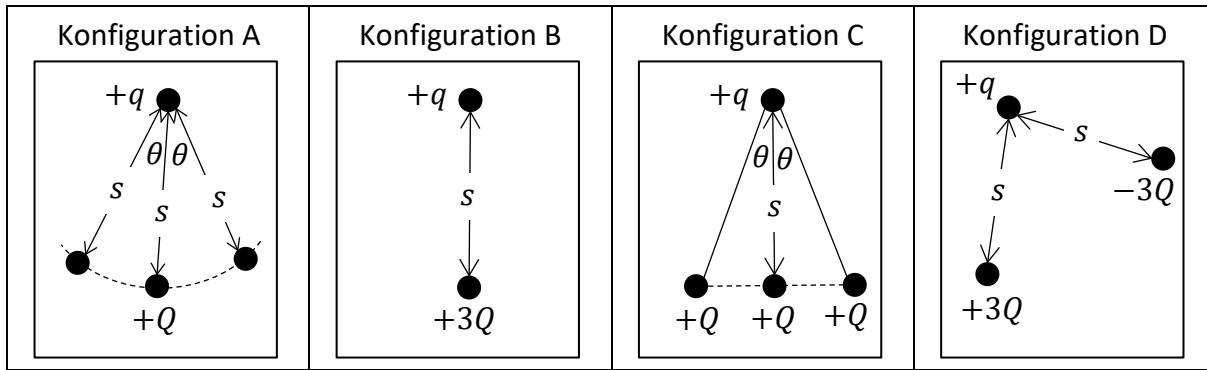
**Geosynchrone** Satelliten umkreisen die Erde einmal in 24 Stunden.

- Wir können Vektor-Felder mehrerer Quellen addieren

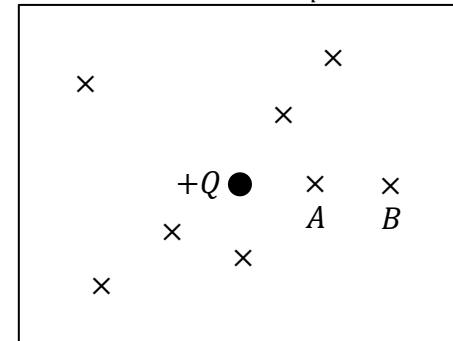
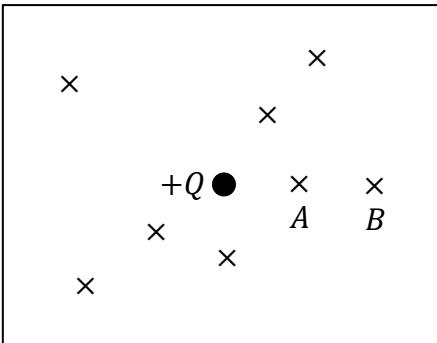
Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt gemeinsam!

*E-Feld ist der kovariante Restbetrag aus Ladungsexperimenten*

17. Ordne die vier folgenden Konfigurationen nach dem Betrag der elektrischen Nettokraft auf die  $+q$ -Ladung an. Begründe diese Reihenfolge:



18. In der Mitte des Diagramms rechts befindet sich eine große positive **Quellenladung**  $+Q$ , umgeben von Markierungen ( $\times$ ), die zeigen, wo wir eine kleine positive **Testladung**  $+q$  platzieren, um die Wirkung der Quellenladung an verschiedenen Positionen zu messen. Skizziere an jedem der markierten Punkte einen Vektor, um die elektrische Kraft darzustellen, die an dieser Position auf die Testladung ausgeübt wird.
19. Wie vergleicht sich der Betrag der Kraft, die beim Punkt  $A$  auf die Testladung ausgeübt wird, mit dem Betrag der Kraft auf die Testladung beim Punkt  $B$ ?
20. Angenommen, wir halbieren die **Testladung**  $q$ . Würde dies die elektrische Kraft ändern, die an verschiedenen Positionen auf die Testladung ausgeübt wird? Falls das so ist, wie? Falls nicht, erkläre warum nicht.
21. Würde sich das Verhältnis  $F_{EqQ}/q$  ändern? Falls das so ist, wie? Falls nicht, erkläre warum nicht.
22. Die an einem beliebigen Punkt  $\mathbf{r}$  ausgewertete Größe  $F_{EqQ}/q$  nennen wir das **elektrische Feld** (auch **E-Feld** genannt)  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  an diesem Punkt:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_{Eq}/q$ . Wie ist der Betrag des E-Feldes an Punkt  $A$  im Vergleich zum E-Feld bei  $B$ ? Begründe.
23. Skizziere einen Vektor an jedem der markierten Punkte im Diagramm rechts, um das E-Feld  $\mathbf{E}$  an diesem Punkt darzustellen.
24. Würde sich der Betrag oder die Richtung des E-Feldes beim Punkt  $A$  ändern, wenn wir die **Quellenladung**  $Q$  erhöhen? Begründe.
25. Würde sich der Betrag oder die Richtung des E-Felds beim Punkt  $A$  ändern, wenn wir die **Testladung**  $q$  erhöhen? Begründe.
26. Würde sich der Betrag oder die Richtung des E-Feldes am Punkt  $A$  ändern, wenn wir das **Vorzeichen** der Testladung  $q$  ändern? Begründe.



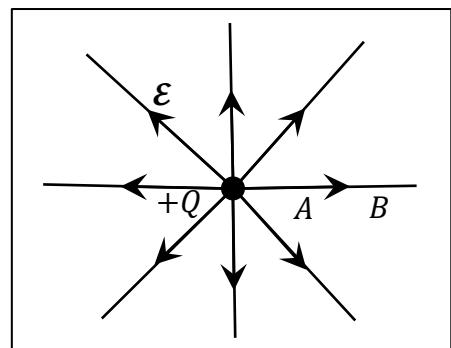
Wir sagen, dass das E-Feld unter Änderungen der Testladung  $q$  **kovariant** ist. Tatsächlich ist dies der Hauptgrund für unsere Annahme, dass  $\mathbf{E}$  real ist: *Es bleibt gleich, egal wie wir es messen.*

**Wir verwenden Feldlinien, um elektrische Felder grafisch darzustellen**

Wir stellen das E-Feld auf zwei verschiedene Arten grafisch dar: durch **Vektoren** oder durch **elektrische Feldlinien**. In der **Vektor**darstellung zeichnen wir an verschiedenen Punkten  $\mathbf{r}$  Vektoren, um die Richtung und Größe von  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  an diesen Punkten zu zeigen. In der **Feldliniendarstellung** zeichnen wir gerade oder gekrümmte Linien, so dass die Tangente an

jeden Punkt auf der Linie entlang der *Richtung* des elektrischen Felds an diesem Punkt liegt. Wie stellen wir also den *Betrag* des elektrischen Feldes in der Feldliniendarstellung dar?

27. Das Diagramm rechts zeigt elektrische Feldlinien, die das E-Feld einer positiv geladenen Quellenladung  $Q$  darstellen. Du hast zuvor festgestellt, dass der Betrag des E-Felds beim Punkt  $A$  größer ist als das Feld an Punkt  $B$ . Welcher Aspekt der elektrischen Feldlinien stimmt mit dieser Information über den Betrag des Feldes überein?



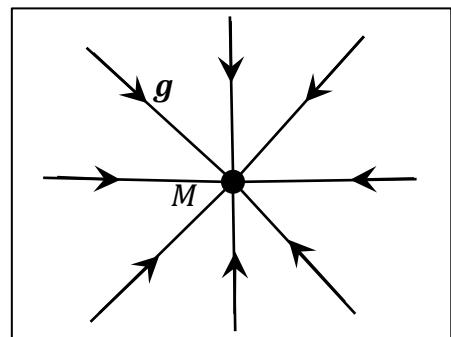
### G-Feld ist der kovariante Restbetrag aus Massenexperimenten

Das *Gravitationsfeld* definieren wir genau analog zum E-Feld. Newtons Gravitationsgesetz besagt, dass die Gravitationskraft  $F_G$  zwischen zwei Punktmassen entlang der Geraden wirkt, die die beiden Punkte verbindet. Der Betrag  $F_G$  dieser Gravitationskraft auf jede der beiden Punktmassen ist proportional zum Produkt der beiden Massen ( $M$  und  $m$ ) und *invers* proportional zum Quadrat des Abstands ( $r$ ) zwischen den beiden Punktmassen:

$$F_G \propto \frac{Mm}{r^2}$$

Wenn wir eine Testmasse  $m$  verwenden, um das Gravitationsfeld einer Quellmasse  $M$  zu messen, berechnen wir an einem beliebigen **Feldpunkt  $r$**  die Größe  $F_{GmM}/m$ , was uns das **Gravitationsfeld** (auch **G-Feld**) genannt)  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  an diesem Feldpunkt liefert:

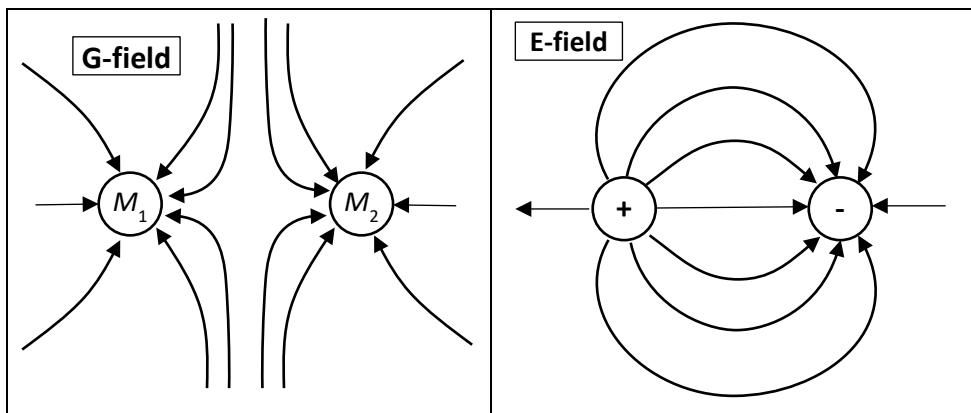
$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_{GmM}/m$$



28. Newton 2 sagt uns, dass  $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$  für eine Masse  $m$ , auf die eine Kraft  $\mathbf{F}$  wirkt. Gleichzeitig sagt uns Newtons Gravitationsgesetz, dass auf eine Testmasse  $m$  eine Gravitationskraft  $\mathbf{F}_{GmM} = m \mathbf{g}(\mathbf{r})$  wirkt. Wie heißt die kinematische Größe, die wir als Maßstab für das G-Feld verwenden?

Auch hier können wir das G-Feld durch Gravitationsfeldlinien darstellen, wie hier im Diagramm gezeigt. Und wieder stellen wir die Feldstärke durch die Dichte der Feldlinien dar:

Das Feld ist stärker dort, wo die Feldlinien dichter beieinander liegen, zum Beispiel in der Nähe der Quellmasse  $M$ . Auf diese Weise zeigen uns Feldlinien die Richtung und Stärke der Kraft auf ein Testteilchen.



Im Gegensatz zu den zwei *Ladungsarten* ( $+/ -$ ) des E-Felds, gibt es nur eine Art von *Masse*. Deswegen können sich G-Felder und E-Felder sehr unterschiedlichen aussehen, wie wir hier im Diagramm feststellen.

## Wir wählen die Proportionalitätskonstante experimentell

Schließlich können wir die Proportionalitätskonstante der zwei Feldgesetze (Newton und Coulomb) durch Experimente bestimmen:

### G-Feld

$$\mathbf{F}_G = m \mathbf{g}(\mathbf{r}); \quad \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \cdot \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}}; \quad G \approx 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

### E-Feld

$$\mathbf{F}_E = q \mathbf{E}(\mathbf{r}); \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}; \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$$

## Fuß fassen

29. Eine Löwin hat eine Masse von 200 kg. Was ist ihr Gewicht auf der Erde (wo  $g = 9.8 \text{ N kg}^{-1}$ )? Was wären ihre Masse und ihr Gewicht auf dem Mond (wo  $g = 1.6 \text{ N kg}^{-1}$ )?
30. (a) Schaue den Begriff *Dichte* nach. (b) Ein Zylinder aus Aluminium mit Radius 4 cm und Höhe 6 cm hat eine Masse von 820 g. Berechne seine Dichte. (c) Benütze diese Information um die Masse eines Aluminium Würfels mit Seitenlänge 5 cm zu berechnen.
31. Schreibe (ohne nach zu schauen) Newtons Gravitationsgesetz und Coulombs Gesetz auf. Was sind die Ähnlichkeiten und Unterschiede?
32. Skizziere einen Graph der gravitationalen Feldstärke  $g_r(r)$  am Feldpunkt  $\mathbf{r}$  gegen den Abstand ( $r$ ) des Feldpunts von der Quellenmasse.
33. Skizziere ein radiales und ein gleichförmiges E-Feld. Wie würdest Du in jedem der beiden Fälle den Wert von  $\mathbf{E}$  messen?

## Beine strecken

34. Setze Dich mit einem Partner zusammen. Wie viele unterschiedliche Anordnungen von zwei Punktladungen in der  $(x, y)$  Ebene findet Ihr, die zusammen ein E-Feld von  $\mathbf{0}$  am Ursprungspunkt erzeugen?
35. Der Erdradius ist ungefähr 6400 km; Masse der Sonne ist  $1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ ; und Durchschnittsabstand der Erde zur Sonne ist  $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ . Schätze (a) die Erdmasse ( $g = 9.81 \text{ N kg}^{-1}$  an der Erdoberfläche), und (b) die gravitationale Anziehungskraft zwischen Sonne und Erde.
36. Der Mond hat Masse  $7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$  und Radius 1740 km. Berechne an der Mondoberfläche (a)  $|\mathbf{g}|$  und (b) das Gewicht eines 25 kg Hunds.
37. Ein Satellit umkreist die Erde 200 km oberhalb der Oberfläche. Berechne (a) die Periode und (b) die lineare Geschwindigkeit des Satelliten.
38. 1913 entdeckte Ernest Rutherford entdeckte den Atomkern, indem er viele  $\alpha$ -Teilchen gegen eine Goldfolie schoss. Fast alle drangen durch, nur ein paar  $\alpha$ -Teilchen prallten zurück von Atomkernen. Rutherford sagte später, das wäre so erstaunlich gewesen, wie wenn eine Kanonenkugel von einem Papierhandtuch zurückgeprallt wäre. Eines von Rutherfords  $\alpha$ -Teilchen ( $q = +2e$ ) wird abgelenkt, wenn es sich  $5 \times 10^{-12} \text{ m}$  von einem Gold-Kern ( $q = +79e$ ) befindet. Hier ist  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  die Elementarladung des Protons und des Elektrons. Was ist der Betrag und die Richtung der elektrostatischen Kraft auf das  $\alpha$ -Teilchen?

## Konstruktionsübung: Prüfungsvorbereitung!

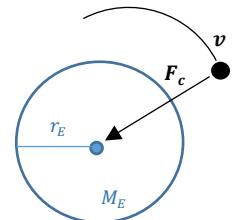
### Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Die International Space Station umkreist die Erde 410 km oberhalb der Oberfläche. Wie schnell muss sie sich bewegen, damit sie nicht zur Erde fällt?

### Musterlösung:

#### Verfolgen

Wir suchen die Geschwindigkeit  $v$  eines Körpers, der sich unter dem Einfluss einer Zentripetalkraft  $F_c$  zur Erdmitte hin, um einen Kreis mit Radius  $(r_E + 410 \text{ km})$  bewegt. ( $r_E = 6371 \text{ km}$ ;  $M_E = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ ;  $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ )



#### Engagieren

Die Gleichung für die radiale Beschleunigung auf die ISS ist  $a_r = -\frac{v^2}{r} \hat{r} = -\frac{1}{m} \frac{GMm}{r^2} \hat{r}$ . Aus diesen Gleichungen berechnen wir die Geschwindigkeit, die sie beibehalten muss, damit sie nicht zur Erde fällt.

#### Abstrahieren

1. Erstelle die Gleichung  $-\frac{v^2}{r} \hat{r} = -\frac{1}{m} \frac{GMm}{r^2} \hat{r}$ .
2. Löse sie für die Geschwindigkeit  $v$  auf.

#### Anwenden

1. Die Gleichung, die die Geschwindigkeit der ISS erfüllen muss, ist:

$$\begin{aligned} -\frac{v^2}{r} \hat{r} &= -\frac{1}{m} \frac{GMm}{r^2} \hat{r} \\ v^2 &= \frac{GM}{r} \\ &= \frac{6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}}{(6371 + 410) \times 10^3 \text{ m}} \approx 5.879 \times 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \end{aligned}$$

2. Die Space Station umkreist also die Erde mit einer Geschwindigkeit von  $v \approx \sqrt{5.879 \times 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}} = 7667.5 \text{ m s}^{-1} = \underline{26603 \text{ km h}^{-1}}$ .

#### Ergebnis verfolgen

Erstens gehen die Einheiten auf. Zweitens: der Umfang der Flugbahn ist  $2\pi(6371 + 410) \text{ km} \approx 42606 \text{ km}$ . Somit bräuchte die ISS etwas unter 2 Stunden für eine Umlaufzeit der Erde, was realistisch klingt.

### Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Ein Wasserstoffatom besteht aus einem Kern mit Ladung  $+e$  und einem Elektron mit Ladung  $-e$  (siehe Aufgaben oben) und Masse  $m_e \approx 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , die ungefähr  $10^{-10} \text{ m}$  voneinander entfernt sind. Nehmen wir an, dass wir die Gravitationskraft zwischen den Teilchen vernachlässigen können, und dass das Elektron den Kern so ähnlich umkreist, wie die ISS die Erde. Wie schnell müsste sich das Elektron bewegen, damit es nicht zum Kern hineinfällt? Wie interpretierst Du Deine Antwort?