Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 19: Messen der Sensitivität für mehrere Variablen

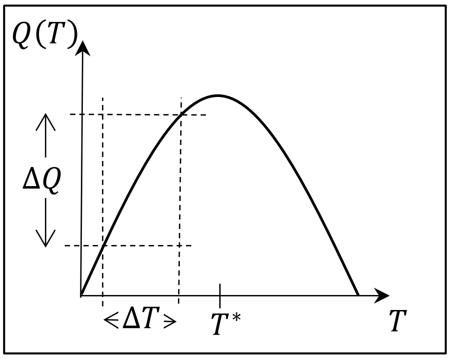
ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

- Partielle Ableitung als Kontrollrate von Funktionen mehrerer Variablen beschreiben;
- Partielle Ableitung zur Herleitung von Newton 2 anwenden.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

Partielle Ableitung misst Sensitivität für eine aus mehreren Variablen

Denken wir nochmal an Ableitungen als Sensitivitäten. Ich habe eine Waschmaschine mit einem Drehknopf, der die *Waschtemperatur* T einstellt. Falls ich diese Drehknopf zu niedrig stelle, ist die Wäsche zu kalt und die Qualität Q der Wäsche gering. Wenn ich diesen Knopf zu hoch stelle, ist die Wäsche zu heiß, die Wäsche wird beschädigt und die Waschqualität ist wieder schlecht. Diese Abhängigkeit sieht aus wie in der Grafik rechts:



- Q hängt von T ab, und wir schreiben also: $Q(T)$.
- Wir können die Temperatur T der Wäsche *unabhängig* wählen, aber sobald wir T gewählt haben, wird Q automatisch bestimmt, da es von der Temperatur *abhängt*. Wir nennen daher Q die ***abhängige*** Variable und T die ***unabhängige*** Variable.
- Wir messen die Empfindlichkeit dieser Abhängigkeit, indem wir den Temperaturregler leicht um einen Betrag ΔT drehen, dann die resultierende kleine Änderung ΔQ in der Waschqualität beobachten und berechnen:

$$\frac{dQ}{dT} \equiv \lim_{\Delta T \to 0} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)$$

- Bei der speziellen „Sweet Spot"-Temperatur $T = T^*$ erreiche ich die allerbeste Waschqualität. T^* ist ein ***stationärer*** Punkt, an dem Q kurzzeitig weder steigt noch fällt bei kleinen Temperaturschwankungen: $dQ/dT = 0$.

Die Qualität meiner Wäsche hängt jedoch nicht allein von der Temperatur ab; es hängt auch davon ab, wie kräftig (K) die Wäsche ist. K ist ein weiterer Regler meiner Waschmaschine – wenn ich ihn zu niedrig stelle, werden meine Socken nicht sauber, und wenn ich ihn zu hoch stelle, macht es Löcher in meinen empfindlichen Socken.

- Wieder hängt Q von V ab, also schreiben wir $Q(T, K)$ mit der Bedeutung: "Q ist eine Funktion zweier Variablen T und K".
- Wir können sowohl den Temperaturregler T als auch den Kraftregler K der Wäsche *unabhängig* von anderen Variablen stellen, aber sobald wir T und K gewählt haben, bestimmen sie gemeinsam automatisch die Qualität Q, da sie von der Temperatur und

Kräftigkeit *abhängt*. Wir nennen daher Q die ***abhängige*** Variable, und T und K sind die beiden ***unabhängigen*** Variablen.

- Wir messen die Empfindlichkeit dieser K-Abhängigkeit, indem wir die kleine Qualitätsänderung ΔQ beobachten, die sich aus einer geringfügigen Änderung der Kraftskala um ΔK ergibt, während wir die Temperatur T konstant halten. Diese Idee, nur einen Regler zu ändern, während alle anderen konstant bleiben, ist etwas Neues und wir brauchen eine neue Notation dafür:

$$\frac{\partial Q}{\partial T} \equiv \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T}\bigg|_{K=const} \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial K} \equiv \lim_{\Delta K \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta K}\bigg|_{T=const}$$

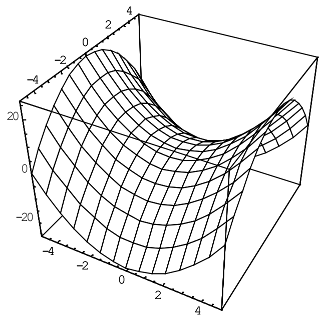
  Diese neue Art von Ableitung hat einen speziellen Namen: die ***partielle Ableitung***.

- Auch hier gibt es einen „Sweet Spot“ (T^*, K^*), an dem die Temperatur T^* und die Kraft K^* die bestmögliche Waschqualität ergeben. (T^*, K^*) ist ein *stationärer* Punkt, an dem Q kurzzeitig weder bei kleinen Schwankungen der Temperatur noch der Kraft ansteigt oder fällt: $\partial Q/\partial T = 0$ and $\partial Q/\partial K = 0$.

1. Dieses Raster zeigt die Waschqualität Q für verschiedene T- und K-Werte. Irgendwo in diesem Raster befindet sich der Sweet Spot, der die beste Wäsche liefert. Skizziere auf dem Gitter die Konturkurven, auf den die Waschqualität den Wert 25, 50 oder 75 nimmt.

5	16	24	29	38	45	53	45	24	24	17
4	25	37	50	57	75	90	70	55	37	20
3	33	43	59	69	90	100	80	57	40	24
2	31	43	57	63	72	73	60	52	37	23
1	22	30	40	42	43	45	40	35	24	19
K/T	$10°$	$20°$	$30°$	$40°$	$50°$	$60°$	$70°$	$80°$	$90°$	$100°$

2. Kreise den stationären Punkt von Q ein und finde die Werte (T^*, K^*) der Temperatur und Kraft am stationären Punkt, wobei $\partial Q/\partial T = 0$ und $\partial Q/\partial K = 0$.
3. Zeichne nun an jedem Linienkreuzungspunkt einen kleinen Pfeil, um die Richtung anzuzeigen, in der die Qualität Q am schnellsten ansteigt (dieser Vektor wird als ***Gradient*** von Q bezeichnet).
4. Wir können Funktionen zweier Variablen genauso visualisieren wie Funktionen einer Variablen: Wir zeichnen einen Graphen. Aber anstatt die y -Achse zu verwenden, um eine *Kurve* $y = f(x)$ zu zeichnen, verwenden wir stattdessen die z-Achse, um die Funktion als *Fläche* $z = g(x, y)$ darzustellen. Rechts siehst Du die Funktion $z = g(x, y) = x^2 - y^2$ als Fläche. Wie lauten die x- und y-Koordinaten des einzelnen stationären Punktes dieser Fläche?



5. Was ist der Gradient der Funktion $g(x, y)$ bei diesem stationären Punkt?
6. Ist dieser stationäre Punkt ein lokales Maximum oder Minimum? Begründe.

Partielle Ableitungen sind sehr einfach zu berechnen

Für uns ist die gute Nachricht, dass es sehr einfach ist, die partielle Ableitung $\partial f/\partial x$ einer beliebigen Funktion f zu berechnen. Wir tun einfach so, als wären alle Koordinaten *außer* x Konstanten und leiten dann nur noch nach x ab. Angenommen, wir möchten die Steigung der Funktion $g(x, y) = x^2 - y^2$ in y-Richtung beim Punkt $(-1, -3)$ wissen:

- Zuerst leiten wir g partiell nach y ab und behandeln dabei x als Konstante: $\frac{\partial g}{\partial y} = -2y$.
- Dann evaluieren wir diese Ableitung am Punkt $(-1,-3)$: $\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(-1,-3)} = -2 \cdot (-3) = 6$.

7. Also: Die Steigung in y-Richtung ist positiv und steil. Stimmt dies mit dem vorigen visuellen Graph der Funktion $g(x,y)$ überein? (Hinweis: Die x-Achse verläuft entlang der unteren Vorderseite des Graphen)

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

- An introduction to partial derivatives

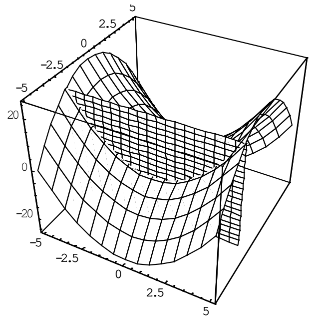
Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt *gemeinsam*!

Warnung: Neue Spezies von stationären Punkten!

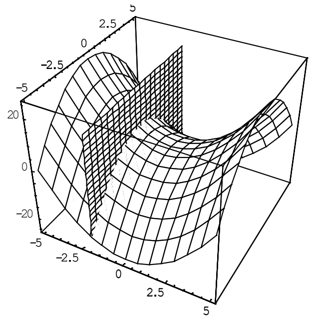
In der neuen Welt der partiellen Ableitungen müssen stationäre Punkte nicht mehr nur entweder Minimen oder Maximen sein – sie können auch Satteln sein! Wie zum Beispiel unsere Funktion $g(x,y) = x^2 - y^2$ beim Ursprungspunkt. Hier haben wir beim Punkt $(0{,}0)$ ein *Minimum* in die x-Richtung und ein *Maximum* in die y-Richtung!

Partielle Ableitung ist die gewöhnliche Ableitung einer Schnittfunktion

Da es oft nicht einfach ist, Graphen von zwei Variablen zu zeichnen, verwenden wir oft ***Schnittfunktionen***, um sie zu verstehen.



8. In der Abbildung rechts sehen wir die Schnittkurve der Fläche $z = x^2 - y^2$ mit der Ebene $y = -2$; wir erhalten sie, indem wir y beim konstanten Wert -2 in der Funktion $g(x,y)$ festhalten. Finde die Gleichung dieser Parabel in der Form $z = f(x)$.
9. Wir nennen diese Schnittkurve die ***Schnittfunktion*** von $g(x,y)$ bei $y = -2$. Finde jetzt die Schnittfunktion von $g(x,y)$ bei $x = -2$ (siehe Diagramm unten rechts).
10. Finde und skizziere die Schnittfunktionen von $g(x,y) = x^2 - y^2$ bei $x = 3$ und bei $y = 3$.
11. Erstelle eine Skizze der Konturen der Fläche $z = x^2 - y^2$.



Partielle Ableitungen können Newton 2 generieren

Isaac Newton stellte sein zweites Gesetz der Mechanik als ***Axiom*** auf: Er sagte uns nicht, woher es kommt, sondern sagte nur, dass es wahr sein muss. Doch etwa 100 Jahre später zeigte Joseph-Louis Lagrange, dass, wenn wir davon ausgehen, dass Objekte immer ihr Bestes geben, um sich entlang einer geraden Linie zu bewegen (Newtons *erstes* Gesetz), dann müssen sie unbedingt dieser ***Euler-Lagrange Gleichung*** befolgen:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right); \quad L(x,v) = \frac{1}{2} m\, {v_x}^2 + F_x\, x$$

Hier ist die Funktion $L(x,v)$ eine Funktion sowohl der Position (x) als auch der Geschwindigkeit (v_x) in x-Richtung; diese Funktion heißt die ***Lagrangesche***. F_x ist eine konstante Kraft, die in x-Richtung wirkt.

12. Berechne die partielle Ableitung $\partial L/\partial x$ auf der linken Seite der Euler-Lagrange-Gleichung.
13. Berechne die partielle Ableitung $\partial L/\partial v_x$ auf der rechten Seite der Euler-Lagrange-Gleichung. Was ist ein anderer passender Name für Dein Ergebnis?
14. Setze nun die beiden Seiten der Euler-Lagrange-Gleichung zusammen, um Lagranges spannende Quantenalternative zur Newtonschen Mechanik zu erhalten!

Fuß fassen

15. Finde alle partiellen Ableitungen erster Ordnung der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3 + x - x^3 - 2xy + y^2 \\ g(x,y) &= x\sin(x-y) \\ h(x,y,t) &= e^{(x-t)}\cos(y+t) \end{aligned}$$

16. Ermittle anhand der Funktionen aus der vorigen Aufgabe die folgenden zwei Werte:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,-1)}; \quad \left.\frac{\partial h}{\partial t}\right|_{\left(0,\frac{\pi}{2},0\right)}$$

17. Erstelle Deine eigene Übung zu partiellen Ableitungen. Wähle zunächst eine Funktion von zwei Variablen aus. Berechne dann ihre beiden partiellen Ableitungen. Tausche schließlich Deine Funktion mit Freunden aus und überprüfe die Antworten der anderen.

Beine strecken

18. Finde alle partiellen Ableitungen erster Ordnung der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} T(x,y) &= x^2y - 2xy \\ f(x,y) &= e^{-xy}\sin x + x^2 - y^2 \\ g(x,t) &= e^{-t/x}\sin 2t \\ h(x,y,z) &= x\,z^2\sin(x/y) \\ k(r,\theta) &= \frac{1}{1-2r\cos\theta + r^2} \end{aligned}$$

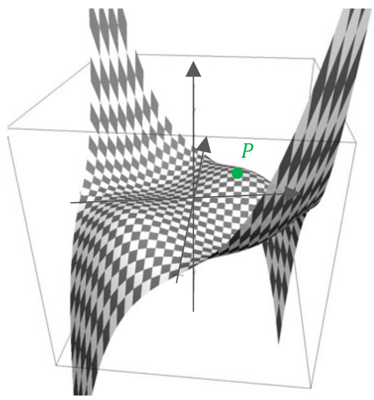
Konstruktionsübung: *Prüfungsvorbereitung*!

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Beweise, dass die x, y-Koordinaten $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ einen stationären Punkt der Funktion $f(x,y) \equiv xy\,(1-x^2-y^2)$ beschreiben.

Musterlösung:

Verfolgen



Die Funktion $f(x,y) \equiv xy\,(1-x^2-y^2)$ ist gegeben, die eine Fläche beschreibt. $f(x,y)$ ist also eine Funktion der zwei unabhängigen Variablen x und y. Der Punkt $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ soll ein stationäre Punkt dieser Fläche sein. Wir wissen bereits, dass ein stationärer Punkt einer Kurve die Steigung null liefert. Diese Idee können wir auf eine Fläche übertragen.

Engagieren

Um zu beweisen, dass P ein stationärer Punkt ist, muss $f(x, y)$ in dieser Stelle keine Änderung in x- sowie in y-Richtung haben. Um das zu prüfen, bilden wir die partiellen Ableitungen der Funktion, also $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$. Wenn wir dann P in die Ableitungen einsetzen und das Ergebnis null ist, ändert sich der Wert der Funktion in x- bzw. y-Richtung an dieser Stelle nicht.

Abstrahieren

1. Bilde $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ durch partielles Ableiten.
2. Setze P in die Ableitungen ein und teste, ob sie beide gleich null sind.

Anwenden

1. Um $\frac{\partial f}{\partial x}$ zu bilden, behandeln wir y wie eine Konstante:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,(1 - x^2 - y^2) - xy(2x) = y - 3x^2y - y^3 = y(1 - 3x^2 - y^2)$$
Für $\frac{\partial f}{\partial y}$ behandeln wir x wie eine Konstante:
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\,(1 - x^2 - y^2) - xy(2y) = x - x^3 - 3xy^2 = x(1 - x^2 - 3y^2)$$
2. Wir setzen die x, y-Koordinaten von P ein um die Änderung an diesem Punkt zu bestimmten:
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = y(1 - 3x^2 - y^2)|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(1 - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 0$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = x(1 - x^2 - 3y^2)|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 0$$
Also ist P ein stationärer Punkt der Fläche $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$.

Ergebnis verfolgen

In dem Diagramm können wir sehen, dass am Punkt P ein lokales Maximum ist. Das stimmt mit unserem Ergebnis überein, denn ein stationärer Punkt kann ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt sein.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Finde alle vier stationären Punkte der Funktion $f(x, y) \equiv xy\,(1 - x^2 - y^2)$.