Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 22: Wie funktionieren Magnetfelder?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

- Die wichtigsten Unterschiede zwischen E-Feldern und B-Feldern beschreiben;
- B-Feldern auf stromleitende Konfigurationen wie gerader Draht und Spule anwenden;
- Unbekannte Probleme mit B-Feldern und Teilcheninteraktionen lösen.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

Quell- und Interaktionsgleichungen bestimmen Felder und ihre Wirkung

Newton und andere Wissenschaftler des 18. und 19. Jahrhunderts führten uns in die Idee eines Feldes ein. Wir kennen bereits zwei Beispiele für Felder: das Gravitationsfeld (***G-Feld***) $\boldsymbol{g}$ und das elektrische Feld (***E-Feld***) $\mathcal{E}$. Im Allgemeinen ist ein Feld eine beliebige Funktion vom Ort: $\boldsymbol{r} = x\,\hat{\boldsymbol{x}} + y\,\hat{\boldsymbol{y}} + z\,\hat{\boldsymbol{z}}$.

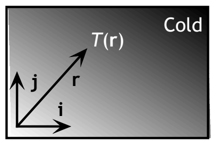
- Das Temperatur-Feld $T(\boldsymbol{r})$ in diesem Raum ist eine ***Scalarfunktion*** von Ort, denn z.B. ein Heizkörper in einer Ecke eines Raums die Luft auf eine höhere Temperatur erwärmt: $T(\boldsymbol{r}) = (297 - r/(2\text{m}))\ \text{K}$.
- Das G-Feld hier an der Erdoberfläche ist ein *Vektor*, der an allen Positionen nach unten zum Boden zeigt: $\boldsymbol{g}(x\,\hat{\boldsymbol{x}} + y\,\hat{\boldsymbol{y}} + 0\,\hat{\boldsymbol{z}}) = -(9.8\ \text{m/s}^2)\,\hat{\boldsymbol{z}}$.
- Wenn M die Masse der Erde ist, ist das G-Feld an jeder Position im Raum $\boldsymbol{r}$ bezogen auf den Erdmittelpunkt ergibt sich aus die Gravitations***quellgleichung***: $(\boldsymbol{r}) = -\frac{GM}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{r}}$, wobei $\hat{\boldsymbol{r}}$ ein Einheitsvektor in die Richtung von $\boldsymbol{r}$ ist (siehe rechts).

Newtons genialer Schritt bestand darin, Felder als echte Akteure in der Welt zu betrachten. Wenn ich auf dem Boden stehe, wirkt das Gravitationsfeld auf die Masse (m) meines Körpers mit einer Gewichtskraft $\boldsymbol{F}_G$ gegeben durch:

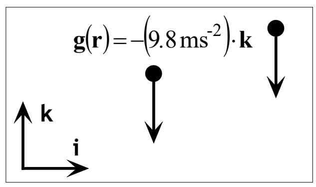
$$\boldsymbol{F}_G(\boldsymbol{r}) = m\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})$$

Wir sagen, dass die Masse der Erde die ***Quelle*** des G-Feldes $\boldsymbol{g}$ ist, und ich bin die ***Testmasse***, auf die $\boldsymbol{g}$ wirkt. Diese Gleichung ist die ***Interaktionsgleichung*** des G-Feldes: Sie beschreibt, wie das Feld $\boldsymbol{g}$ mit meiner Testmasse m interagiert.

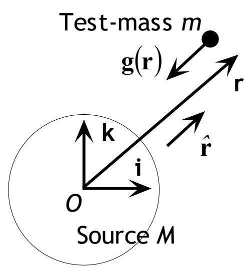
Temperatur-Feld:



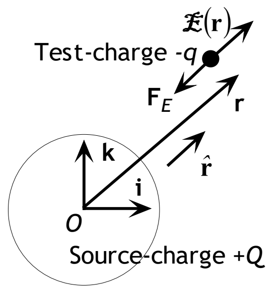
G-Feld an Erdoberfläche:



G-Feld im All:



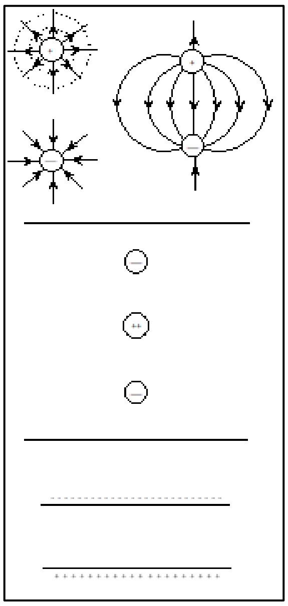
Elektrisches Feld:



Auch das E-Feld $\mathcal{E}$ hat sowohl eine Quellgleichung als auch eine Interaktionsgleichung. Es interagiert nicht mit der Masse m, sondern stattdessen mit der Ladung q:

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\hat{\boldsymbol{r}} \quad \boldsymbol{F}_E(\boldsymbol{r}) = q\,\mathcal{E}(\boldsymbol{r})$$

1. Schaue zurück auf die Gravitationsinteraktionsgleichung. Wenn $\boldsymbol{g}$ nach rechts zeigt, in welche Richtung zeigt die Interaktionskraft $\boldsymbol{F}_G$?
2. Schaue nun zurück auf die elektrostatische Interaktionsgleichung. Wenn $\mathcal{E}$ nach rechts zeigt, in welche Richtung zeigt die Interaktionskraft $\boldsymbol{F}_E$? Was ist, falls q negativ ist?
3. ***Elektrische Feldlinien*** stellen die Kraft auf eine positive Testladung in einem E-Feld dar (siehe rechts). An jedem Punkt zeigt die Feldlinie entlang der Richtung des elektrischen Feldes $\mathcal{E}$. Wenn die Feldlinien nahe beieinander liegen, repräsentieren sie ein starkes E-Feld; weit auseinander liegende Linien deuten darauf, dass das Feld dort schwach ist.
4. Wo in den Diagrammen rechts liegen die Feldlinien am nächsten beieinander? Hättest Du auch erwartet, dass das Feld hier am stärksten ist? Begründe.
5. Warum können sich elektrische Feldlinien niemals kreuzen?
6. Warum zeigen elektrische Feldlinien immer von positiven zu negativen Ladungen?
7. Das mittlere Diagramm rechts zeigt drei Ladungen: $+2e$ in der Mitte und $-e$ oben und unten. Das untere Diagramm zeigt zwei parallele, geladene Platten (oben negativ, unten positiv). Zeichne E-Feldlinien für diese beiden Ladungskonfigurationen.



E-Feldlinien zeigen immer die Potentialsteigung hinab

Ein ***Äquipotential*** ist eine Linie oder Fläche, die Punkte mit dem gleichen elektrischen Potential verbindet. Äquipotentiale sind nützlich, um das elektrische Potential grafisch darzustellen; sie sind wie die Höhenlinien einer topografischen Landkarte.

8. Das Diagramm oben links in der rechten Box zeigt zwei Äquipotentiale für eine einzelne isolierte positive Ladung. Welches dieser beiden Äquipotentiale hat den höheren Wert? (Denke daran, dass das Feld immer den Potentialgradienten *nach unten zeigt*!)
9. Feldlinien zeigen *immer rechtwinklig* zu den Äquipotentialen, da sie in diese Richtung maximale Arbeit verrichten können. Skizziere anhand dieser Tatsache die Äquipotentialkurven in jedem der Diagramme rechts.
10. *„Äquipotentiale sind die Höhenlinien eines Bergs, auf dem sich eine <u>positive</u> Testladung bewegt, und Feldlinien sind die Kraft, die diese Ladung bergab drückt. Wenn Äquipotentiale dicht beieinander liegen, ist der Berg steiler und Ladungen werden deswegen stärker den Potentialberg hinuntergedrückt."* Schreibe diesen Text um als eine Aussage über die Bewegung *<u>negativer</u>* Ladungen.

Ressourcen: <u>Überfliege</u> diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

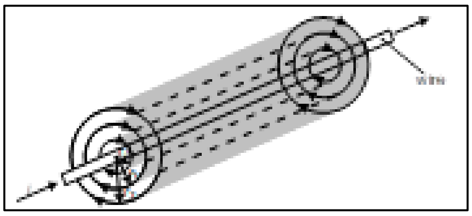
- Ein B-Feld drückt seitlich auf sich bewegende Ladungen
- Ladungen im B-Feld werden kreisförmig abgelenkt
- Die Kraft auf einen Draht ist proportional zur B-Feldstärke
- Ein stromleitender Draht verursacht ein B-Feld

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt *gemeinsam*!

Das Magnetfeld eines langen, geraden Drahtes ist kreisförmig

1820 bemerkte der dänische Philosoph und Wissenschaftler Hans Christian Oersted, dass ein Kompass bei einem Blitzschlag abgelenkt wird. Er zeigte, dass jeder elektrische Strom ein Magnetfeld erzeugt und dass Magnetfelder eine Kraft auf sich bewegende Ladungen ausüben. Untersuchen wir nun die Form eines Magnetfelds (oder ***B-Felds***) $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ etwas genauer.

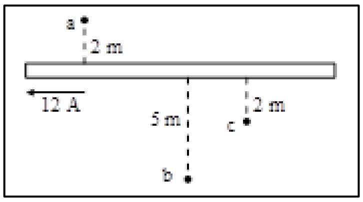
Das allereinfachste B-Feld wird durch einen langen geraden Draht erzeugt, durch den ein konstanter technischer Strom i fließt (siehe rechts). Das Magnetfeld um den Draht herum ist $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$, wobei $\boldsymbol{r}$ ein Vektor ist, der rechtwinklig zum Draht nach außen zeigt. Wir finden die *Richtung* des B-Feldes, indem wir mit dem rechten Daumen in Richtung des technischen Stroms i zeigen und dann unsere Finger in Richtung des Feldes kräuseln. Sein *Betrag* B ist:



$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi\, r}$$

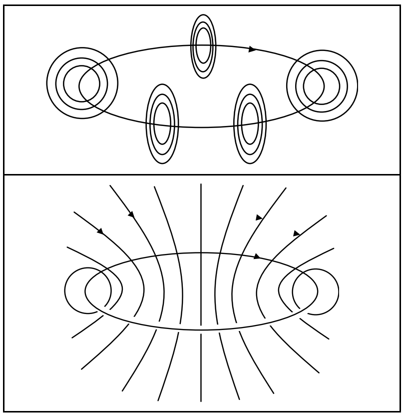
Dabei ist $\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Tm/A}$ die ***Permeabilitätskonstante*** und ***Tesla*** (T) ist die SI-Einheit der magnetischen Feldstärke.

11. Stelle Dir vor, Du misst an einem Punkt in der Nähe des Drahtes eine bestimmte Stärke B_1 des B-Feldes. Was passiert mit der Feldstärke, wenn Du Dich um den Draht herum bewegst und dabei immer den gleichen *Abstand* r zum Draht beibehältst? Wir bringen diesen Befund zum Ausdruck, wenn wir die Quellgleichung für gerade Drähte als ***zylindrisch symmetrisch*** bezeichnen.
12. Wie ändert sich die Feldstärke $B(r)$, falls Du Deinen Abstand r vom Draht erhöhst?
13. Wie ändert sich die Feldstärke, falls Du den Strom i im Draht erhöhst?
14. Wie ändert sich die Feldstärke, wenn Du Dich entlang des Drahtes bewegst und dabei Deinen Abstand r vom Draht konstant haltst?
15. Im Draht rechts fließt ein Strom von 12A. Ermittle für jeden Feldpunkt a, b und c in der Nähe des Drahtes die B-Feldstärke und gib an, ob das Feld in diese Seite hinein oder aus dieser Seite heraus zeigt.



Das Magnetfeld einer einzelnen Drahtschleife durchfädelt die Schleife

Wir können die Quellgleichung eines geraden Drahtes verwenden, um das B-Feld einer ***einzelnen Drahtschleife*** zu finden. Wenn wir uns jedes winzige Element der Schleife als einen kurzen geraden Draht vorstellen, sind die B-Feldlinien in der Nähe dieses Elements fast kreisförmig (oberes Diagramm), während weiter entfernt von der Schleife die Form im unteren Diagramm sich aus der Wirkung aller Punkte der Schleife bildet.



Die B-Feldstärke am Zentrum der einzelnen Schleife ist:

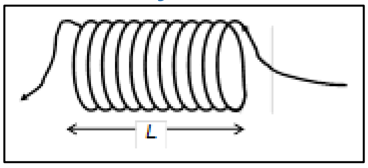
$$B_{centre} = \frac{\mu_0 i}{2\, R}$$

Dabei ist i der Strom in der Schleife und R ist der Radius der Schleife.

16. Wie ändert sich die B-Feldstärke in der Mitte der Schleife, falls Du den in der Schleife fließenden Strom erhöhst?
17. Wie ändert sich die B-Feldstärke in der Mitte der Schleife gemäß der Einzelschleifen-Quellgleichung, wenn Du die Schleife breiter machst, indem Du den Radius R erhöhst?
18. Wie kannst Du mit Hilfe Deiner rechten Hand die Richtung des B-Feldes innerhalb der Schleife ermitteln?

Eine Spule ist die Zusammensetzung von N einzelnen Schleifen

19. Die Einzelschleifen-Quellgleichung sagt uns das B-Feld im Zentrum von nur einer Drahtschleife. Wie würde dieses Feld aussehen, wenn wir N einzelne Schleifen gleichen Radius zu der im Diagramm rechts gezeigten ***Spule*** zusammensetzen würden?



Das B-Feld innerhalb einer zylindrischen Spule der Länge L ist *gleichförmig* und parallel zur Spulenachse mit der Stärke

$$B = \frac{\mu_0 N i}{L}$$

20. Skizziere mit Hilfe der Rechte-Hand-Regel die Feldlinien im obigen Diagramm einer Spule.
21. Warum gilt die Spulenquellengleichung nur für eine „unendlich lange“ Spule? Unter genau welchen Bedingungen würde diese Gleichung eine ausreichende Approximation zum B-Feld einer physikalischen Spule liefern?
22. Die Größe N/L ist ein von den Spulenherstellern bereitgestellter Wert. Welche physikalische Eigenschaft einer Spule misst diese Größe?

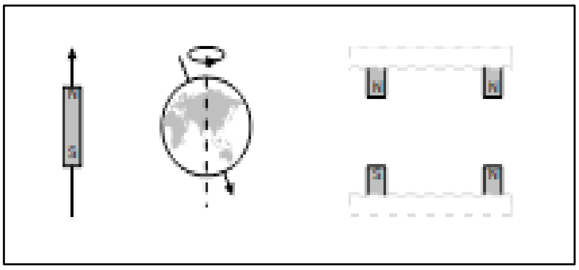
B-Felder haben kein Potential und keine Quelle

Magnetfelder treten in der Natur in vielen verschiedenen Größenordnungen auf. Rechts sind einige typische B-Felder-Werte.

B-Feld-stärke	B-Feld-Quelle
10^{8} T	Neutronenstern
10^{2} T	Supraleiter
10^{-1} T	Stabmagnet
10^{-2} T	Solar surface
10^{-5} T	Earth's surface
10^{-8} T	Crab nebula
10^{-10} T	Galactic field

Ein physikalischer Magnet ist ein Objekt, das viele kleine einzelne Stromschleifen enthält, die zusammen ein einzelnes B-Feld erzeugen. Der ***Nordpol*** des Magneten ist die Seite, an der die Feldlinien vom Magneten *nach außen* zeigen; der ***magnetische Südpol*** ist die Seite, an der die Feldlinien *nach innen* zeigen. Bringen wir zwei Magnete zusammen, *stoßen sich* die ***gleichen Pole*** (Nord-Nord oder Süd-Süd) ab; die *ungleichen* Pole (Nord-Süd) *ziehen sich an*.

23. Die Erde ist ein Magnet, und wir definieren das nördliche Ende eines Stabmagneten als das Ende, das vom arktischen Pol der Erde angezogen wird. Was sagt das über den magnetischen Charakter des arktischen Pols aus?
24. Wir können B-Felder in einer Raumregion durch ***magnetische Feldlinien*** darstellen, die von magnetischen Nordpolen zu magnetischen Südpolen zeigen. Nenne einen einfachen Grund, warum sich B-Feldlinien niemals kreuzen können.
25. Zeichne die B-Feldlinien der Magnete rechts ein.



26. Merke, dass alle B-Feldlinien, die wir bisher gezeichnet haben, geschlossene Schleifen sind, und denke auch daran, dass E-Feldlinien immer an Ladungsquellen beginnen und enden und von positiver zu negativer Ladung zeigen. Was sagt das über die mögliche Existenz magnetischer Quellen aus?
27. Denke auch daran, dass E-Feldlinien immer einen potentiellen „Berg“ hinab zeigen, dessen Hang von positiven zu negativen elektrischen Ladungsquellen nach unten führt. Was sagt dies über die Möglichkeit aus, ein magnetisches Potenzial zu finden, das B-Feldlinien verursacht?

Lorentzkraftgesetz ist die Interaktionssgleichung von E- und B-Feldern

Da wir nun wissen, wie B-Felder entstehen, könnten wir uns fragen, wie B-Felder mit Materie interagieren, damit wir die Felder messen können. Die B-Feld-Interaktionsgleichung ist eigentlich nur eine Erweiterung der E-Feld-Interaktionsgleichung – das ***Lorentzkraftgesetz***:

$$\boldsymbol{F}_{EM} = q\,\mathcal{E}(\boldsymbol{r}) + q\,\big(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\big) = q\,[\mathcal{E} + \,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})]$$

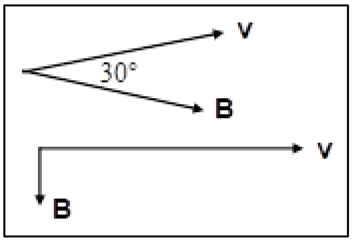
Das Lorentzkraftgesetz sagt uns die ***elektromagnetische Kraft*** $\boldsymbol{F}_{EM}$ auf ein geladenes Teilchen, das sich in einer Kombination aus E- und B-Feldern bewegt. q ist die Ladung des Teilchens; $\boldsymbol{r}$ ist sein Ortsvektor; $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ ist seine Geschwindigkeit; und $\mathcal{E}(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ sind die Stärken der E- und B-Felder beim Punkt $\boldsymbol{r}$.

Den ersten Term im Lorentzkraftgesetz erkennen wir aus unseren früheren Arbeiten zu elektrischen Feldern: $\boldsymbol{F}_E = q\,\mathcal{E}$ ist die ***elektrische Kraft*** auf das Teilchen und der zweite Teil ist die ***magnetische Kraft*** $\boldsymbol{F}_B = q\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ auf das Teilchen.

28. Wie groß ist die magnetische Kraft $\boldsymbol{F}_B$ auf ein Teilchen, dessen Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ parallel zum Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ liegt?
29. Warum muss sich ein geladenes Teilchen *quer* durch ein B-Feld bewegen, um eine magnetische Kraft zu erfahren?
30. Wie ändert sich die magnetische Kraft $\boldsymbol{F}_B$ auf ein Teilchen, wenn das Teilchen schneller wird (d. h. v wird größer)?
31. Wie ändert sich die magnetische Kraft $\boldsymbol{F}_B$ auf ein Teilchen, wenn das Teilchen langsamer wird (d. h. v wird kleiner)? Diese Tempoabhängigkeit unterscheidet sich stark von E-Feldern und ist unser erster Hinweis darauf, dass die Relativitätstheorie irgendwo im Hintergrund von B-Feldern lauert.

Fuß fassen

32. In jedem der folgenden Fälle sind die Richtungen von $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{B}$ sowie das Vorzeichen von q angegeben. Finde jeweils die Richtung der Magnetkraft $\boldsymbol{F}_B$: (a) $\boldsymbol{v}\rightarrow$; $\boldsymbol{B}\uparrow$; q positiv. (b) $\boldsymbol{v}\downarrow$; $\boldsymbol{B}\leftarrow$; q positiv. (c) $\boldsymbol{v}\downarrow$; $\boldsymbol{B}\leftarrow$; q negativ. (d) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$; $\boldsymbol{B}\uparrow$; q positiv. (e) $\boldsymbol{v}$ zeigt senkrecht *in die Ebene* dieser Seite; $\boldsymbol{B}\uparrow$; q negativ. (f) $\boldsymbol{v}\downarrow$; $\boldsymbol{B}$ zeigt senkrecht *aus der Ebene* dieser Seite; q positiv.
33. Eine unendlich lange Spule mit 500 Windungen pro Meter und einem Radius von 10 cm führt einen Strom von $4\ \mathrm{A}$. Wie groß ist die B-Feldstärke auf halbem Weg zwischen der Mittelachse der Spule und dem Draht ihrer Windungen?
34. Was ist der Betrag von $\boldsymbol{F}_B$ in jedem der zwei Fälle im Diagramm rechts?
Oben: $q = 2\ \mathrm{C}$; $v = 10^4\ \mathrm{m/s}$; $B = 2\ \mathrm{T}$.
Unten: $q = -1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$; $v = 10^3\ \mathrm{m/s}$; $B = 10^{-4}\ \mathrm{T}$.



35. Ein langer gerader Draht führt einen stetigen Strom in positiver z -Richtung. Wie ist die Richtung der magnetischen Kraft (falls vorhanden) auf ein positiv geladenes Teilchen auf der x -Achse, wenn dieses Teilchen: (a) stationär ist; (b) sich in die positive x-Richtung bewegt; (c) sich parallel zur z -Achse bewegt?

Muskeltraining

36. Ein gleichförmiges (d.h.: überall gleiches) Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ weist aus diesem Blatt heraus, und das E-Feld $\mathcal{E}$ ist überall Null. Ein Teilchen mit positiver Ladung q bewegt sich mit Tempo v zum oberen Rand der Seite. Finde den Betrag und die Richtung der Kraft auf das Teilchen.
37. Ein Elektron bewegt sich im B-Feld aus der vorigen Aufgabe mit dem Tempo v gegen den oberen Rand der Seite. Beschreibe genau die Flugbahn des Elektrons über Zeit. Wie wird sich diese Flugbahn ändern, falls das Elektron kontinuierlich kinetische Energie an seine Umgebung verliert?
38. Wiederhole die vorige Aufgabe, aber nimm diesmal an, dass ein gleichförmiges E-Feld $\mathcal{E}$ zusätzlich aus der Seite herauszeigt.
39. In einer vorherigen Aufgabe hast Du festgestellt, dass ein Teilchen mit Masse m und Ladung q, das sich mit Tempo v rechtwinklig zu einem Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ bewegt, sich im Kreis bewegen wird. Beweise, dass sich der Radius R dieses Kreises aus der folgenden Gleichung ergibt:

$$R = \frac{m\,\boldsymbol{v}}{|q|\,B}$$

40. Ein Proton bewegt sich mit einem Tempo von $2.0 \times 10^{7}\ \mathrm{m/s}$ parallel zu einem Draht in einer Entfernung von 0,1 m vom Draht. Finde den Strom im Draht, der eine magnetische Kraft mit Betrag $6.4 \times 10^{-17}\ \mathrm{N}$ auf das Proton ausübt. (*Du wirst selber die Ladung eines Protons nachschlagen müssen!*)

Numerische Ergebnisse

???

Konstruktionsübung: *Prüfungsvorbereitung*!

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

???

Musterlösung:

Verfolgen

???

Engagieren

???

Abstrahieren

???

Anwenden

???

Ergebnis verfolgen

???

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

???