Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 21: Die Struktur mathematischer Ausdrücke

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

- Potenzen, Exponenten und deren Manipulationsregeln erkennen und beschreiben;
- Logarithmen erkennen und beschreiben;
- Potenzregeln zur Manipulation algebraischer Ausdrücke anwenden;
- Argumenttransformationen anwenden, um Funktionen zu verschieben und stauchen.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

*Eine Summe besteht aus zusammenaddierten **Termen***

Ein ***Ausdruck*** ist eine ***Summe*** von *Termen*, die miteinander addiert oder subtrahiert werden. Z.B.:

$$x + 2 \quad y - \sin x \quad x^2 - 3x + 2 \quad x + x + x$$

Wir können diesen letzten Ausdruck mit Multiplikation umschreiben. Da $(x + x + x)$ drei x addiert, schreiben wir es einfacher als $3x$.

Die Assoziativität von Addition erlaubt uns Klammern neu anzuordnen, also können wir wiederholte Summen wie folgt umschreiben:

$$3x + 2x \equiv (x + x + x) + (x + x) \equiv (x + x + x + x + x) \equiv 5\mathrm{x}$$

*Ein Produkt besteht aus zusammenmultiplizierten **Faktoren***

Ein ***Term*** ist immer ein ***Produkt*** von *Faktoren*, die miteinander multipliziert oder dividiert werden. Z.B.:

$$2 \times 3 \quad ab \quad 3xy \quad 3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad x \times x \times x$$

Wir können dieses letzte Produkt mit Potenzen umschreiben. Da $(x \times x \times x)$ drei x zusammen multipliziert, schreiben wir es einfacher als x^3.

Die Assoziativität von Multiplikation erlaubt uns Klammern neu anzuordnen, also können wir wiederholte Produkte wie folgt umschreiben:

$$x^3 + x^2 \equiv (x \times x \times x) \times (x \times x) \equiv (x \times x \times x \times x \times x) \equiv x^5$$

Eine Potenz besteht aus einer Basis mit Exponent

Ein ***Faktor*** ist immer entweder ein eingeklammerter Ausdruck oder eine *Potenz*. Z.B.:

$$(x^2 - 3x + 2) \quad x^3 \quad 3^{(x+y)} \quad 2^3 \quad b^x$$

In diesem letzten Faktor nennen wir b die ***Basis***, wir nennen x den ***Exponenten***, und wir nennen den gesamten Ausdruck b^x eine ***Potenzfunktion*** – oder einfach eine ***Potenz***.

1. Identifiziere die Basis und den Exponenten in jeder der obigen Potenzfunktionen.

Es gibt Standard-Ersetzungsregeln für die Manipulation von Potenzen

2. Wenn $b^2 \equiv b \times b$, und $b^3 \equiv b \times b \times b$, dann gilt $b^5 \equiv$ ______________ ?
3. Das Assoziativgesetz der Multiplikation besagt, dass wir die Klammern zwischen den Faktoren neu anordnen können, also $(b \times b \times b \times b \times b) \equiv (b \times b) \times (b \times b \times b)$. Schreibe diese Identität vollständig in Bezug auf Potenzen so: $b^{??} \equiv (b^{??}) \times (b^{??})$.
4. Notiere die allgemeine Ersetzungsregel zur *Multiplikation* von Potenzen:
$$b^x \times b^y \equiv b^{\_\_\_}$$
5. Wenn der Exponent uns sagt, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert wird, verrät uns dies sofort den Wert von b^1:
$$b^1 \equiv \_\_\_\_\_$$
6. Wenn $b^3 \times b^2 \equiv b^5$, dann gilt $b^3 \equiv b^5/b^2$, also können wir dies umschreiben als $b^5/b^2 \equiv b^3 \equiv b^{5-2}$. Notiere die allgemeine Ersetzungsregel zur *Division* von Potenzen:
$$b^x/b^y \equiv b^{\_\_\_}$$
7. Wählen wir $y = x$ in dieser Regel zur Division von Potenzen, so stellen wir fest, dass $b^x/b^x \equiv 1 \equiv b^{x-x}$. Notiere die allgemeine Ersetzungsregel für ***Nullexponenten*** (angenommen $b \neq 0$!):
$$b^0 \equiv \_\_\_\_\_$$
8. Wählen wir $x = 0$ in der Regel zur Division von Potenzen, so stellen wir fest, dass $b^0/b^y \equiv 1/b^y \equiv b^{-y}$. Notiere die allgemeine Ersetzungsregel für ***negative Exponenten***:
$$b^{-x} \equiv \_\_\_\_\_$$
9. Wir wissen schon, dass: $b \equiv \sqrt{b} \times \sqrt{b}$. Indem wir dies in Bezug auf einen unbekannten Exponenten x schreiben, finden wir: $b^1 \equiv b^x \times b^x \equiv b^{2x}$. Es muss also der Fall sein, dass $1 = 2x$, und daher:
$$b^{1/2} \equiv \_\_\_\_\_$$
10. Notiere die allgemeine Ersetzungsregel für ***Kehrwertexponenten***:
$$b^{1/n} \equiv \_\_\_\_\_$$
11. Da wir jetzt wissen, dass $b^{1/3} \equiv \sqrt[3]{b}$, muss es also der Fall sein, dass $b^{2/3} \equiv \left(\sqrt[3]{b}\right)^2 \equiv \sqrt[3]{b^2}$. Notiere die allgemeine Ersetzungsregel für ***Bruchexponenten***:
$$b^{x/y} \equiv \_\_\_\_\_ \equiv \_\_\_\_\_$$

Logarithmen sind die Inversen von Potenzfunktionen

Wir definieren die ***Exponentialfunktion zur Basis b*** folgendermaßen: $\exp_b\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$; $\exp_b(x) \equiv b^x$.

12. Evaluiere die folgenden Ausdrücke:
$\exp_{10}(-3)$, $\exp_{10}(-2)$, $\exp_{10}(-1)$, $\exp_{10}(0)$, $\exp_{10}(1)$, $\exp_{10}(2)$, $\exp_{10}(3)$.
13. Würdest Du aufgrund Deiner bisherigen Erfahrungen mit der Funktion $\exp_{10}(\,)$ sagen, dass es $n{:}\,1$, $1{:}\,n$, oder $1{:}\,1$ ist? Begründe.
14. Deine Antwort auf die vorherige Frage bedeutet, dass $\exp_{10}(\,)$ eine inverse Funktion $\exp_{10}^{-1}(\,)$ haben sollte, die diese Identitäten erfüllt:

$$\exp_{10}^{-1}(\exp_{10}(x)) \equiv \exp_{10}(\exp_{10}^{-1}(x)) \equiv x$$

Angenommen, diese Umkehrfunktion existiert, evaluiere die folgenden Ausdrücke: $\exp_{10}^{-1}(0.001)$, $\exp_{10}^{-1}(0.01)$, $\exp_{10}^{-1}(0.1)$, $\exp_{10}^{-1}(1)$, $\exp_{10}^{-1}(10)$, $\exp_{10}^{-1}(100)$, $\exp_{10}^{-1}(1000)$.

15. Der übliche Name für die Funktion $\exp_{10}^{-1}(\,)$ ist die ***Logarithmus-Funktion zur Basis 10***: $\log_{10}(\,)$. Evaluiere diese Ausdrücke: $\log_{10}(10)$, $\log_{10}(1000\,000)$, $\log_{10}(0.0001)$.

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

- Die Arbeit mit Potenzen und Exponenten ist unabdingbar für Mathematiker!
- Wir können Klammern ausmultiplizieren
- Addieren der Exponenten bedeutet Multiplizieren der Basiszahlen
- Wir können Exponenten auch kürzen
- Wir können Exponenten exponieren!
- Die Exponenten 0 und 1 haben besondere Bedeutung
- Wir müssen negative Basen extra berücksichtigen
- Exponenten können auch rational (also Brüche) sein
- Exponenten können auch negativ sein
- Wir können diese verschiedenen Tücken auch kombinieren
- Diese Techniken können wir auch genauso bei Zahlen verwenden
- Addition verschiebt Funktionen
- Verschiebungen helfen uns Funktionen zu plotten
- Multiplikation dehnt und spiegelt Funktionen
- Wir können Funktionen auch stauchen
- … und wir können diese Transformationen kombinieren

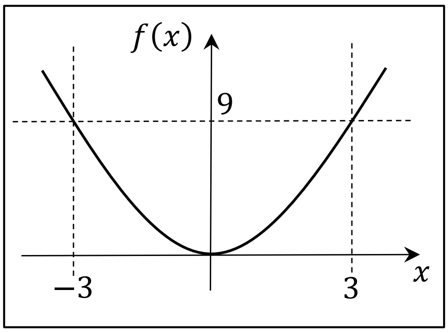
Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt *gemeinsam*!

Exponent = Potenzierte Zahl; Zahl = Logarithmierter Exponent

16. Evaluiere $\exp_{10}(5)$.
17. Evaluiere $\log_{10}(10^5)$.
18. Schreibe einen Ausdruck für $\exp_b(x)$ auf.
19. Schreibe einen Ausdruck für $\log_b(b^x)$ auf.
20. Evaluiere $\exp_b(3) \cdot \exp_b(2)$.
21. Evaluiere $\log_b(10^3) + \log_b(10^2)$.
22. Schreibe einen Ausdruck für $\exp_b(x) \cdot \exp_b(y)$ auf.
23. Schreibe einen Ausdruck für $\log_b(b^x) + \log_b(b^y)$ auf.

Addition verschiebt Funktionen; Multiplikation staucht Funktionen

24. Schaue Dir den Graphen rechts an, der die Funktion $f(x) = x^2$ über der Domäne $[-3, +3]$ veranschaulicht. Skizziere basierend auf diesem Graphen die folgenden zwei Graphen über derselben Domäne: $g_1(x) \equiv f(x) + 2$ und $h_1(x) \equiv f(x) - 2$.
25. Wie wirkt sich das Addieren oder Subtrahieren einer konstanten Zahl k *zum Wert* einer Funktion $f(x)$ im Allgemeinen auf den Graphen aus?



26. Skizziere nun die beiden Graphen $g_2(x) \equiv f(x+2)$ und $h_2(x) \equiv f(x-2)$ über der Domäne $[-3,+3]$. Was ist die allgemeine Auswirkung des Addierens oder Subtrahierens einer konstanten Zahl k *zum Argument* einer Funktion $f(x)$?
27. Skizziere die zwei Graphen $g_3(x) \equiv 2f(x)$ und $h_3(x) \equiv f(x)/2$ über der Domäne $[-3,+3]$. Was ist die allgemeine Auswirkung der Multiplikation oder Division *des Werts* einer Funktion $f(x)$ mit einer konstanten Zahl k?
28. Skizziere nun die zwei Graphen $g_4(x) \equiv f(2x)$ und $h_4(x) \equiv f(x/2)$ über der Domäne $[-3,+3]$. Was ist die allgemeine Auswirkung der Multiplikation oder Division *des Arguments* einer Funktion $f(x)$ mit einer konstanten Zahl k?
29. Wiederhole nun alle fünf der vorherigen Aufgaben dieses Abschnitts mit der neuen Funktion $u(x) \equiv \sin(x)$ über der Domäne $[0,2\pi]$.
30. Fasse die Ergebnisse dieses Abschnitts in einer allgemeinen Regel zur Transformation von Funktionen zusammen.

Fuß fassen

31. Vereinfache diese Ausdrücke:
    (a) $x^3 \cdot x^5$; (b) $a^7 \cdot a^8$; (c) $\frac{x^8}{x^3}$; (d) $(a^2)^4$; (e) $(xy^2)\cdot(x^3yz)$; (f) $\frac{a^2b^4c^6}{a^3b^2c}$.
32. Evaluiere diese Ausdrücke: (a) $16^{1/2}$; (b) $8^{1/3}$; (c) $16^{3/4}$; (d) x^0 ; (e) $49^{-1/2}$.
33. Beschreibe die geometrische Transformationen, die den Graph von $y = f(x)$ auf folgende Graphen abbilden: (a) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$; (b) $y = f(x-4)$; (c) $y = -f(x)$.
34. Löse diese Gleichung möglichst schnell *im Kopf*: $2x^4 = 162$.

Beine strecken

35. (a) Schreibe den Wert von $27^{1/3}$ auf. (b) Was ist der Wert von $27^{4/3}$?
36. Die Kurve $y = f(x)$ wird um zwei Einheiten nach oben verschoben; was ist dann die Gleichung der Kurve?
37. Angenommen, dass $10000\sqrt{10} = 10^k$, was ist dann der Wert von *k*?
38. Faktorisiere vollständig diesen Ausdruck: $2x^4 - 32x^2$.
39. Schreibe den Ausdruck $\frac{x+5x^3}{\sqrt{x}}$ in die Form $x^m + 5x^n$ um, wobei *m* und *n* Konstanten sind.

Numerische Ergebnisse

- 31: $[x^8; a^{15}; x^5; a^8; x^4y^3z; \frac{b^2c^5}{a}]$
- 32: $[4; 2; 8; 1; \frac{1}{7}]$
- 33: [Horizontale Streckung mit Faktor 2; Verschiebung $\binom{4}{0}$; Spiegelung durch x-Achse]
- 35: [3; 81]
- 36: $[y = f(x) + 2]$
- 37: $[\frac{9}{2}]$
- 39: $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$

Konstruktionsübung: *Prüfungsvorbereitung*!

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Evaluiere diesen Ausdruck: $16^{3/4}$.

Musterlösung:

Verfolgen

Der Ausdruck $16^{3/4}$ hat als Potenz einen Bruch. Es ist einfacher den Ausdruck zu evaluieren, wenn wir ihn in eine andere Form umwandeln. Dazu brauchen wir die Potenzregeln.

Engagieren

- Eine Potenzregel sagt, dass wir einen Audruck $a^{\frac{m}{n}}$ umschreiben können in den Ausdruck $\sqrt[n]{a^m}$. Wenn wir die Potenzregel angewendet haben, vereinfachen wir den Ausdruck unter der Wurzel.
- Wir könnten in zwei Richtungen gehen: zuerst die Potenz evaluieren und dann die Wurzel, oder zuerst die Wurzel und dann die Potenz. Wir merken aber, dass wir die vierte Wurzel aus 16 schon einfacher berechnen können, und versuchen‘s deswegen lieber zuerst mit der Wurzel: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Abstrahieren

1. Wende die Potenzregeln an und wandle den Ausdruck in eine Wurzel um.
2. Vereinfache den Ausdruck unter der Wurzel.

Anwenden

1. Wir wenden die Potenzregel $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ an und wandeln unseren Ausdruck um:
$$16^{3/4} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3$$
2. Wir vereinfachen den Ausdruck unter der Wurzel indem wir ihn in ein Produkt umschreiben. Dann berechnen wir die Quadratwurzel:
$$\left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$$

Ergebnis verfolgen

Wie erwartet, ist der Wert kleiner als 16, denn $\frac{3}{4} < 1$. Wenn wir den Ausdruck anders herum evaluieren, bekommen wir: $16^{3/4} = \left(\sqrt[4]{16^3}\right) = \left(\sqrt[4]{16 \cdot 16 \cdot 16}\right) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, was mit unserem Ergebnis übereinstimmt.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Evaluiere diesen Ausdruck: $27^{-4/3}$.