Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 23: Polynome Faktorisieren liefert Nullstellen

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

- Den Fundamentalsatz der Algebra beschreiben;
- Restsatz und Polynomdivision zum Suchen der Nullstellen eines Polynoms anwenden.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

Ein Polynom ist eine Summe von Potenzfunktionen

Ein ***Polynom n-ten Grades*** $p_n(x)$ ist diese Summe von Potenzfunktionen:

$$p_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{k=n} a_k\, x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Die konstanten Zahlen $a_0, a_1, a_2, \cdots a_n$ heißen die ***Koeffizienten*** des Polynoms. Der ***Grad*** des Polynoms ist die höchste Potenz (n) des Polynoms. Hier ein paar Beispiele:

Ein Polynom 0. Grades heißt ***konstant***:	-10
Ein Polynom 1. Grades heißt ***linear***:	$-7x - 10$
Ein Polynom 2. Grades heißt ***quadratisch***:	$4x^2 - 7x - 10$
Ein Polynom 3. Grades heißt ***kubisch***:	$x^3 + 4x^2 - 7x - 10$

Polynome sind wichtig, weil wir sie mit einem Computer sehr einfach auswerten und manipulieren können. 1990, als neuronale Netze noch etwas Neues waren, arbeitete ich für eine Firma, die ihre neuronale Netz-Software enorm beschleunigte, indem sie einfach alle komplizierten und teuren Funktionen durch schnelle Polynom-Approximationen ersetzte!

Faktorisieren vereinfacht Polynom-Berechnung und ermittelt Nullstellen

Ein ***Faktor*** ist ein mathematischer Ausdruck, der mit einem anderen Ausdruck multipliziert wird. Diese zusammen multiplizierten Faktoren bilden gemeinsam ein ***Produkt***. Wir ***faktorisieren*** einen Ausdruck, indem wir seine linearen Faktoren suchen. Z.B.:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 8x + 4 &= 4(x^2 + 2x + 1) \\ &= 4(x+1)(x+1) \\ &= 4(x+1)^2 \end{aligned}$$

Wir verwenden Faktorisieren, um die *Wurzeln*, oder *Nullstellen* eines Polynoms zu finden:

$$\begin{aligned} & x^2 + 6x - 7 = 0 \\ \Longrightarrow\quad & (x+7)(x-1) = 0 \\ \Longrightarrow\quad & (x+7) = 0 \lor (x-1) = 0 \\ \Longrightarrow\quad & (x = 1) \lor (x = -7) \end{aligned}$$

da mindestens einer der zwei Faktoren gleich Null sein muss.

Der ***Fundamentalsatz der Algebra*** besagt, dass wir jedes Polynom immer in lineare Faktoren $(x - r)$ zerlegen können, wobei die Zahl r als ***Wurzel*** des Polynoms bezeichnet wird.

Angenommen zum Beispiel, wir wissen bereits, dass das Polynom $p_3(x) \equiv x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ einen linearen Faktor $(x - r)$ besitzt. In diesem Fall muss gelten:

$$p_3(x) \equiv (x - r) \cdot p_2(x)$$

wobei $p_2(x)$ irgendein quadratisches Polynom ist. Wenn wir also $x = r$ setzen, ist unser Polynom gleich Null: $p_3(r) = 0$. Dies ist der Inhalt des ***Faktorsatzes***:

- Ein Polynom $p_n(x)$ besitzt einen Faktor $(x - r)$ genau dann, wenn $p_n(r) = 0$.

Die *Wurzeln* eines Polynoms sind also einfach die ***Nullstellen*** dieses Polynoms. Zwei weitere nützliche Ergebnisse sind:

- $p_n(1) = 0$ genau dann, wenn die Summe der Koeffizienten des Polynoms null ist, in diesem Fall ist $(x - 1)$ ein Faktor.
- (***Restsatz***) $p_n(r) = b$ genau dann, wenn b der Rest ist, nachdem wir das Polynom $p_n(x)$ durch $(x - r)$ geteilt haben.

Wir faktorisieren Polynome mit dem Faktorsatz und Division

Hier ist ein Algorithmus zum Faktorisieren von Polynomen. Nehmen wir zum Beispiel an, wir wollen dieses Polynom faktorisieren: $p_3(x) \equiv x^3 + 4x^2 - 7x - 10$.

a) Stelle Dir zunächst das Polynom als Produkt von Faktoren vor:

$$p_3(x) \equiv x^3 + 4x^2 - 7x - 10 \equiv (x - r)(x - s)(x - u)$$

Es muss also der Fall sein, dass $-r \times s \times u = -10$, oder $rsu = 10$. Basierend auf dem ***Prinzip Des Netten Professors*** ist es wahrscheinlich, dass die Wurzeln alle Integer (ganze Zahlen) sind. In dem Fall sind die einzigen Kandidaten für r die Werte ± 1, ± 2, ± 5 oder ± 10.

b) Probiere diese Kandidaten im *Restsatz* aus: Falls $p_3(r) < 0$ und $p_3(s) > 0$, muss e seine Wurzel zwischen r und s geben, und falls $p_3(r) = 0$, muss r selber eine Wurzel sein. In unserem Fall probieren wir zum Beispiel den Wert 2 als Wurzel aus: $p_3(2) = 2^3 + 4 \times 2^2 - 7 \times 2 - 10 = 0$. Daher ist $(x - 2)$ nach dem Faktorsatz ein Faktor!

c) Sobald wir den Faktor $(x - 2)$ gefunden haben, können wir den Grad von $p_3(x)$ durch Polynomdivision reduzieren, um unsere Arbeit zu erleichtern:

$$\frac{p_3(x)}{(x - 2)} \equiv x^2 + 6x + 5$$

(*Wir sehen im folgenden Abschnitt, wie man diese Polynomdivision durchführt!*)

d) Wir können Inspektion oder die Mitternachtsformel verwenden, um diese Quadratik zu faktorisieren:

$$x^2 + 6x + 5 \equiv (x + 1)(x + 5)$$

e) Wir haben also $p_3(x)$ vollständig faktorisiert:

$$p_3(x) \equiv x^3 + 4x^2 - 7x - 10 \equiv (x - 2)(x + 1)(x + 5) \quad \underline{\text{qed}}$$

Wir dividieren Polynome durch schriftliche Division zur Basis x

So teilen wir $p_3(x) \equiv x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ durch den Faktor $(x - 2)$:

$$
\begin{array}{llllll}
x^2 & +6x & +5 & & \\
\hline
(x^3 & +4x^2 & -7x & -10) & :(x-2) \\
\underline{x^3} & \underline{-2x^2} & \downarrow & \downarrow & \\
 & 6x^2 & -7x & \downarrow & \\
 & \underline{6x^2} & \underline{-12x} & \downarrow & \\
 & & 5x & -10 & \\
 & & \underline{5x} & \underline{-10} & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

- Wir können Polynome addieren und subtrahieren
- Wir können Polynome mit mehreren Variablen addieren und subtrahieren
- Wir können Polynome multiplizieren
- Wir können Polynome auch dividieren
- Polynomdivision funktioniert auch mit komplexeren Polynomen
- Oft ergibt die Division einen Restbetrag
- Das funktioniert auch mit komplexeren Teilern
- Der Restbetragssatz ist ein bisschen wie mathematische Zauber
- Der Restbetragssatz hilft uns Restbeträge zu finden
- Der Restbetragssatz hilft uns Faktoren zu prüfen
- Der Restbetragssatz hilft uns Koeffizienten zu finden

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt *gemeinsam*!

Fuß fassen

1. Schreibe die folgenden Funktionen in die Form $f(x) \equiv (x+2)g(x) + r$ um, wobei $g(x)$ eine Quadratik ist: (a) $f(x) \equiv 3x^3 - 4x^2 - 5x - 6$; (b) $f(x) \equiv x^3 + 2x^2 - 3x + 4$; (c) $f(x) \equiv 2x^3 + 6x - 3$.
2. Finde den Restbetrag, wenn folgende Ausdrücke durch (i) $(x+1)$ oder (ii) $(x-1)$ geteilt werden: (a) $f(x) \equiv 6x^3 - x^2 - 3x - 12$; (b) $f(x) \equiv x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + 4$; (c) $f(x) \equiv x^5 + 2x^2 - 3$.
3. Finde den Restbetrag, wenn $f(x) \equiv 3x^3 + 7x^2 - 12x + 14$ geteilt wird durch: (a) $(x+2)$; (b) $(2x+4)$; (c) $(x-3)$; (d) $(2x-6)$.
4. Welche der folgenden sind Faktoren von $f(x) \equiv 2x^3 - 6x + 4$: (a) $(x-1)$; (b) $(x+1)$; (c) $(x-2)$; (d) $(2x-2)$?
5. Finde passende Werte für c und d, damit $2x^3 + 5x^2 + cx + d$ genau durch $(x-2)(x+3)$ teilbar ist.

Bergsteigen

6. Faktorisiere und finde alle Nullstellen des Polynoms $P(x) \equiv x^3 - 5x^2 - 2x + 24$.
7. Sei $f(x) \equiv 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$: (a) Finde den Restbetrag, wenn $f(x)$ durch (i) $(x-1)$ und (ii) $(2x+1)$ geteilt wird. (b) Zeige anhand des Faktorsatzes, dass $(x+1)$ ein Faktor von $f(x)$ ist. (c) Faktorisiere $f(x)$ vollständig.
8. Sei $f(x) \equiv (4x^2 + 3x + 1)(x - p) + 5$, wobei p eine Konstante ist: (a) Nenne den Wert von $f(p)$. (b) Bestimme den Wert von p unter der Annahme, dass, wenn $f(x)$ durch $(x+1)$ geteilt wird, der Restbetrag gleich –1 ist. (c) Anhand dieses Werts für p, finde den Restbetrag, wenn $f(x)$ durch $(x-1)$ geteilt wird.

9. Erstelle Deine eigene Hausaufgabe! Überrasche Deine Familie und Freunde! Wähle einfach drei Zufallszahlen a, b und c (*sie können positiv oder negativ sein, aber nicht zu groß, und bleib lieber bei Integer-Werten!*). Dann multipliziere diesen Polynomausdruck aus: $P(x) \equiv (x-a)(x-b)(x-c)$. Schließlich tausche Dein Polynom mit einer Freundin aus. Beide faktorisieren dann und suchen alle Nullstellen des Polynoms des jeweilig anderen. Spaß für die ganze Familie! (*Außer eventuell für Baby Paula und Großonkel Reginald!*)

Numerische Ergebnisse

- 1: $[(x+2)(3x^2-10x+15)-36; (x+2)(x^2-3)+10;$ $(x+2)(2x^2-4x+14)-31]$
- 2: $[-16,-10;\ -1,9;\ -2,0]$
- 3: $[42; 42; 122; 122]$
- 4: [a, d]
- 5: $[-9,-18]$
- 8: $[5,2,-3]$

Konstruktionsübung: *Prüfungsvorbereitung*!

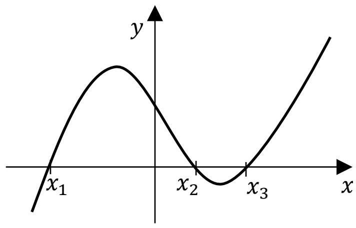
Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Finde alle Nullstellen dieses Polynoms: $p(x) \equiv x^3 - 7x + 6$.

Musterlösung:

Verfolgen

Wir suchen alle Nullstellen des Polynoms $p(x) \equiv x^3 - 7x + 6$. $p(x)$ ist dritten Grades mit positivem führenden Term und negativer Steigung beim Abschnittspunkt (0,6). Es kann also maximal drei Nullstellen haben und sieht ungefähr so aus, wie in der Skizze rechts.



Engagieren

Wir haben keine ‚Mitternachtsformel' für die Nullstellen einer Kubik, also müssen wir verschiedene Werte im Faktorsatz ausprobieren ($p(a) = 0 \iff (x-a)$ ein Faktor von $p(x)$), um einen Faktor zu finden. Dann können wir durch diesen Faktor teilen um eine Quadratik zu bekommen.

Abstrahieren

1. Verwende den Faktorsatz um einen Faktor von p durch Ausprobieren zu finden.
2. Teile das Polynom durch diesen Faktor um eine Quadratik zu bekommen.
3. Ermittle die weiteren Nullstellen durch Faktorisieren oder ‚Mitternachtsformel'.

Anwenden

1. Wir probieren einfache Faktoren aus (Bsp.:$1,-1,2,-2$) und fangen an mit $x=1$ in $p(x)$:

$$p(1) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \text{ ist ein Faktor von } p(x).$$

2. Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (x^3 - 7x + 6) : (x-1) \equiv x^2 + x - 6 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ \quad\ x^2 - 7x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{-(x^2 - x)} \\ -6x + 6 \\ \underline{-(-6x + 6)} \\ 0 \end{array}$$

3. Wir faktorisieren das Ergebnis der Polynomdivision um die weiteren Nullstellen zu bekommen:

$$x^2 + x - 6 \equiv (x + 3)(x - 2)$$

Das Polynom kann also umgeschrieben werden in: $p(x) = (x - 1)(x + 3)(x - 2)$. Und die Nullstellen von $p(x)$ sind also $\underline{x = 1; -3; 2}$.

Ergebnis verfolgen

Wenn wir als Probe die ermittelten Nullstellen von x in $p(x)$ einsetztten, bekommen wir für jeden Fall das Ergebnis null. Unsere Werte stimmen also, und mehr als drei Nullstellen kann eine Kubik nicht haben.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Finde alle Nullstellen dieses Polynoms: $q(x) \equiv x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.