

Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 25: Wie befreien sich Felder von ihren Quellen?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du ...

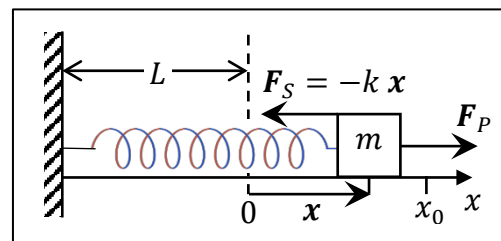
- Erklären, wie oszillatorische Lösungen aus den Maxwell-Gleichungen entstehen;
- Die Federanalogie anwenden, um zu erklären, wie Schwingungen entstehen;
- Die innere Energie hinsichtlich ihrer Fähigkeit erklären, Arbeit zu lagern;
- Trigonometrische Funktionen auf Schwingungsprobleme anwenden.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

Im vorherigen Kapitel haben wir gesehen, dass die Maxwell-Gleichungen eine interessante Möglichkeit nahelegen: *dass Felder ausreichend real sind, um beobachtbare Konsequenzen zu erzeugen, indem sie einfach miteinander interagieren – ganz ohne Teilchen!* In diesem Kapitel untersuchen wir diese Idee genauer, und sie wird uns helfen, die Schwingungen zu verstehen, die aller Materie und Leben in der Welt zugrunde liegen.

Feder: ein einfaches Modell für Felder

Lass uns zunächst ein einfaches Modell für Felder als Federn einführen. Schau Dir das Diagramm rechts an. Hier sehen wir einen Block mit der Masse m , der



auf einer reibungsfreien Eisfläche liegt und mit einer Feder an einer festen Wand befestigt ist. Die Feder hat keine Masse und hat die **Eigenlänge** L – das heißt, wenn der Block im Abstand L von der Wand ist, wird die Feder weder gedehnt noch gestaucht und übt somit keine Kraft auf den Block aus. In dieser Gleichgewichtslage ist die **Dehnung** der Feder $x = 0$.

Mit dem Vektor x beschreiben wir sowohl die Verschiebung des Blocks nach rechts von Position 0 als auch die Ausdehnung der Feder über seine Eigenlänge L hinaus. Wenn ich den Block über L hinaus *von der Wand weg* bewege, übt die Feder eine **Rückstellkraft** F_S ('S' steht für 'Spring') auf den Block aus, die ihn *zurück zur Wand* zieht. **Hookes Gesetz** für Federn besagt, dass diese Rückstellkraft F_S negativ proportional zur Verschiebung x :

$$F_S = -k x$$

Die Konstante k wird hier als **Federhärte** bezeichnet. Er misst, wie viel Rückstellkraft die Feder bei einer Dehnung von 1 Meter aufbringt (Einheit: N/m).

Beachte, dass Hookes Gesetz ganz einfach eine **Feldgleichung** $F_S(x) = -k x$ ist, die die Rückstellkraft $F_S(x)$ auf den Block als Funktion des jeweiligen Punkts x im Raum liefert. Tatsächlich sind Federn eine einfache und nützliche Methode, um atomare und molekulare Felder in einem Computer zu modellieren (oder näherungsweise anzunähern). Um zu sehen, wie das funktioniert, lass uns nun die Block-Feder-Situation im Diagramm auf drei sehr unterschiedliche Arten analysieren:

- Zuerst analysieren wir das System C , das *sowohl* den Block *als auch* die Feder kombiniert;
- Als nächstes analysieren wir das System B , das nur den Block allein enthält;
- Schließlich analysieren wir das System S , das *nur die Feder* enthält.

System C: Kinetische Energie ist nicht ausreichend (sehr wichtig!)

Bisher haben wir in diesem Kurs den Arbeits-Energie-Satz in dieser Form verwendet: $\Delta E_K = \Delta W$. Um zu sehen, wie mangelhaft dieses Energiemodell ist, denke an das kombinierte System C . Angenommen, der Block ruht zuerst an der Position $x = 0$. Nun wende ich eine Kraft F_P (siehe Diagramm) an, um den Block von Position $x = 0$ nach rechts bis zur Position x_0 zu ziehen und halte ihn dort in Ruhe. Dabei dehnt der Block die Feder, die wiederum eine Rückstellkraft F_S auf den Block ausübt.

1. Nachdem ich den Block zur Position $x = x_0$ hinausgezogen habe, lasse ich ihn aus dem Ruhezustand los, woraufhin die Feder ihn nach links zieht, bis der Block mit dem Tempo v den Punkt $x = 0$ erreicht. Zeichne rechts ein Freikörperdiagramm, das *nur diejenigen* Kräfte enthält, die während des Zeitraums von der Freisetzung bis zum Erreichen von 0 *von außerhalb des kombinierten Systems C* auf dieses System einwirken. Beschrifte diese Kräfte nach Typ und Urheber.
2. Gib für jede der Kräfte in Deinem Diagramm an, ob diese Kraft während des Zeitintervalls vom Loslassen bis zur Ankunft *positive*, *negative* oder *null* Arbeit auf C ausübt. Begründe.
3. Der Block enthält Masse, also verschiebt er bei seiner Bewegung den Schwerpunkt des Systems C mit – die kinetische Energie des Blocks trägt also zur kinetischen Energie vom Gesamtsystem C bei. Schreibe für jede der beiden folgenden Größen einen Ausdruck auf, die für das Intervall vom Loslassen bis zur Ankunft bei $x = 0$ gilt. Falls eine dieser Größen Null ist, gib dies explizit an. Begründe:

$$\Delta E_{KC} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \Delta W_C = \underline{\hspace{2cm}}$$

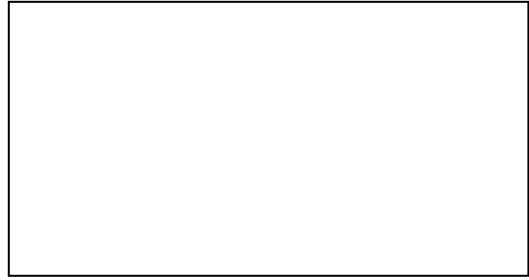
4. Nun hatte C *keine* kinetische Energie, bevor ich den Block aus der Position $x = x_0$ losgelassen habe, aber es besitzt *doch* kinetische Energie, als der Block an der Position $x = 0$ ankommt. Schreibe den Arbeits-Energie-Satz $\Delta E_{KC} = \Delta W_C$ für diesen Prozess auf und erkläre, warum er den Ergebnissen *widerspricht* (!), die Du gerade für ΔE_{KC} und ΔW_C gefunden hast.

Du hast gerade entdeckt, dass der Arbeits-Energie-Satz nicht vollständig sein kann: Woher kommt all diese zusätzliche kinetische Energie?! Wir müssen unbedingt dieses Geheimnis näher untersuchen ...

System B: Die zusätzliche Energie entsteht aus Arbeit auf den Block!

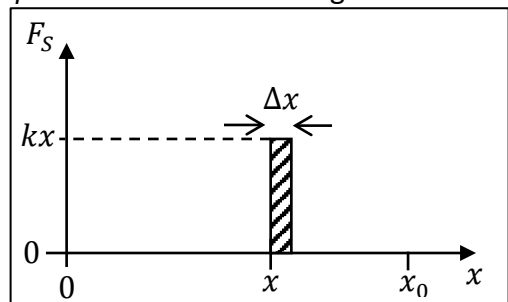
Eine gängige Lösung für dieses Problem, die Du vielleicht schon mal gehört hast, ist, dass der Block bei Position $x = x_0$ eine „potentielle“ Energie besitzt, die beim Loslassen des Blocks in kinetische Energie umgewandelt wird. Um zu sehen, dass diese Geschichte nicht so stimmen kann, analysieren wir nun das System B , das lediglich den Block enthält:

5. Nachdem ich den Block aus Position $x = x_0$ losgelassen habe, zieht ihn die Feder wieder nach links, bis er mit dem Tempo v an der Position $x = 0$ ankommt. Zeichne rechts ein Freikörperdiagramm des Systems B , das nur den Block enthält, und zeichne dabei alle Kräfte, die während des Intervalls ab dem Loslassen bis zur Ankunft bei $x = 0$ auf den Block wirken. Beschrifte jede Kraft mit ihrem Typ und Urheber.
6. Schreibe einen Ausdruck auf für ΔE_{KB} : die Änderung der kinetischen Energie des Blocks *beim Ziehen* aus Position $x = x_0$ zur Position $x = 0$.
7. Gib für jede der Kräfte in Deinem Diagramm an, ob diese Kraft während des Zeitintervalls vom Loslassen bis zur Ankunft *positive, negative* oder *null* Arbeit auf den Block ausübt. Begründen.
8. Der Arbeits-Energie-Satz für den Block lautet nun: $\Delta E_{KB} = \Delta W_B$. Erkläre, wie diese Gleichung jetzt Sinn macht, ohne zusätzliche „potenzielle“ Energie einführen zu müssen.



Es wäre nützlich, wenn wir diese Gleichung verwenden könnten, um das Tempo v des Blocks zu berechnen, während er sich nach links an Position $x = 0$ vorbei bewegt. Dazu müssen wir jedoch die Arbeit ΔW_B berechnen, die die Feder auf den Block verrichtet, während sie den Block nach links zieht. Lass uns jetzt genau das tun ...

9. Notiere den Betrag und die Richtung der Verschiebung, die der Block erfährt, während er sich aus Position $x = x_0$ zur Position $x = 0$ bewegt.
10. Welchen Betrag und welche Richtung hat nach Hookes Gesetz die Rückstellkraft F_S , die die Feder auf den Block ausübt?
11. Zeigt diese Rückstellkraft F_S *parallel* oder *nicht parallel* zur Verschiebung des Blocks?
12. Während die Feder den Block von Position $x = x_0$ zu Position $x = 0$ verschiebt, übt die Feder an jeder Position x eine nach links gerichtete Kraft mit Betrag $F_S = kx$ auf den Block aus. Skizziere im Diagramm rechts einen Graph, der zeigt, wie sich F_S ändert, während x zwischen $x = 0$ und $x = x_0$ variiert. (*Hinweis: k ist eine Konstante!*)



13. Diese Graph zeigt einen bestimmten Zeitpunkt, wo die Federdehnung x beträgt. Zu diesem Zeitpunkt zieht F_S den Block um eine kurze Strecke Δx *nach links*. Ist die Arbeit, die die Feder auf den Block über diese kurze Distanz verrichtet, *positiv, negativ* oder *Null*?
14. Schreibe einen Ausdruck für die Arbeit auf, die die Feder über diese kurze Strecke Δx am Block verrichtet.
15. Deine Antwort auf die vorherige Aufgabe stellt die Fläche des einzelnen dünnen rechteckigen Streifens dar, der unter Deinem Graph bei der Federdehnung x angezeigt wird, mit Breite Δx und Höhe kx . Wenn wir die Dehnung der Feder in viele solcher kleinen Einzelschritte aufteilen und ihre einzelnen Flächen addieren, würden sie gemeinsam die Gesamtfläche unter Deinem Graph zwischen $x = 0$ und $x = x_0$ ausmachen. Und zum Glück hat Dein Diagramm eine sehr einfache geometrische Form,

sodass wir diese Gesamtfläche ganz einfach als die Fläche eines Dreiecks betrachten können. Wie hoch ist dieses Dreieck? Wie breit? Was ist seine Gesamtfläche?

Du solltest inzwischen festgestellt haben, dass die Feder die folgende Arbeit ΔW_B am Block verrichtet, wenn sie den Block von $x = x_0$ bis $x = 0$ zieht:

$$\Delta W_B = \frac{1}{2} k x_0^2$$

16. Setze nun diesen Ausdruck in die Arbeits-Energie-Gleichung ein, die Du in Übung 8 aufgeschrieben hast, und verwende diese Gleichung um einen Ausdruck für das Ankunftsstempo v des Blocks in Bezug auf andere Variablen zu ermitteln. [$x_0 \sqrt{k/m}$]

Wir haben festgestellt, dass wir keine „potentielle“ Energie benötigen, um den Einfluss der Feder auf die Geschwindigkeit des Blocks zu berechnen. Wir haben jedoch noch nicht herausgefunden, woher diese Arbeit ΔW_B auf den Block kommt – dieses Thema muss warten, bis wir uns in der Gruppensitzung treffen.

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

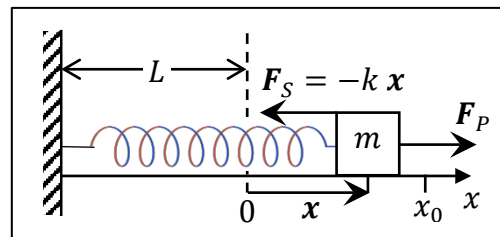
??? Diese werde ich später liefern. Entschuldigung – habe gerade keine Zeit! ☺

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt gemeinsam!

System S: Arbeit wird als innere Energie des Felds gelagert

OK, wir haben also festgestellt, dass die kinetische Energie des Blocks durch Arbeit am Block zugeliefert wird, aber woher kommt diese Arbeit? Jetzt beantworten wir diese Frage, indem wir das System S analysieren, das *nur* die Feder enthält ...

Stelle Dir vor, der Block befindet sich zunächst im Ruhezustand an der Position $x = 0$. Nun wende ich eine Kraft F_P (siehe Diagramm rechts) an, um den Block von Position $x = 0$ bis zur Position x_0 herauszuziehen und halte ihn dort im Ruhezustand. Dabei dehnt der Block die Feder. Wir untersuchen nun, wie viel Arbeit der Block an der Feder verrichtet, um sie zu dehnen.



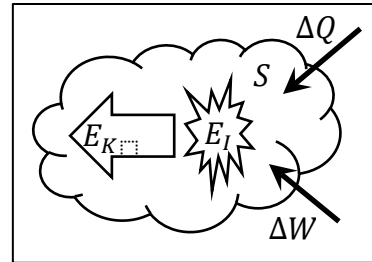
17. Zeichne ein Freikörperdiagramm des Systems S (d. h. der Feder) und benenne die Kräfte nach Urheber.
18. Schreibe für jede Kraft auf, ob diese Kraft Arbeit verrichtet, während die Feder gedehnt wird.
19. Während ich den Block nach außen ziehe, zeigt die Kraft F_P zu jedem Zeitpunkt nach rechts und dehnt die Feder um eine kurze Strecke Δx auch nach rechts aus. Schreibe einen Ausdruck in Abhängigkeit von k , x und Δx für die Arbeit auf, die F_P über diese kurze Strecke Δx verrichtet.
20. Diese Arbeit ist wieder die Fläche eines schmalen Streifens im Graphen von Aufgabe 12. Wir erhalten also wieder die Arbeit ΔW_S auf S als Gesamtfläche unter diesem Graphen:

$$\Delta W_S = \frac{1}{2} k x_0^2$$

Dies ist die Arbeit, die der Block an der Feder verrichtet, um sie zu dehnen. Nun haben wir vorhin gesehen, dass der Arbeits-Energie-Satz ein Spezialfall des **ersten Hauptsatzes der Thermodynamik** ist:

$$\Delta E_K + \Delta E_I = \Delta W + \Delta Q$$

Dieser Hauptsatz besagt (siehe Diagramm rechts), dass alle Änderungen der kinetischen Energie (ΔE_K) und der inneren Energie (ΔE_I) eines geschlossenen Systems S allein daraus entstehen, dass jemand Arbeit (ΔW) auf S leistet, oder Wärme (ΔQ) in S hineinfließt. Für jetzt vernachlässigen wir weiterhin den Wärmefluss, fangen aber jetzt an über Veränderungen der *inneren* Energie nachzudenken:



$$\Delta E_K + \Delta E_I = \Delta W$$

Eigentlich gibt es keine verschiedenen Arten von Energie – es gibt nur eine Art, die aber auf unterschiedliche Weise gelagert (gespeichert) werden kann. Wir können sie entweder als die *geordnete* Bewegung eines *gesamten* Systems S (**kinetische** Energie E_K) oder als die *ungeordneten* Bewegungen und Spannungen *innerhalb* von S (**innere** Energie E_I) lagern.

21. Wende nun den Ersten Hauptsatz auf das System S an, um die Menge an innerer Energie ΔE_{IS} zu ermitteln, die in der Feder gelagert wird, nachdem der Block daran gearbeitet hat: Also nachdem ich den Block um eine Strecke x_0 hinausgezogen habe, und ihn dann im Ruhezustand festhalte.
22. Überprüfe, ob Dein Wert für ΔE_{IS} mit Deinem früheren Wert ΔW_B für die von der Feder am Block verrichtete Arbeit übereinstimmt.
23. Entscheide, welchem Schüler Du zustimmst in der folgenden Diskussion:

Studierende 1: "Die Feder verrichtet Arbeit am Block, wodurch die innere Energie des Blocks verändert wird. Also müssen wir schreiben: $\Delta W_B = \Delta E_{KB} + \Delta E_{IB}$."

Studierende 2: "Aber ΔW_B und ΔE_{IB} sind beide gleich $\frac{1}{2} k x_0^2$, also heben sie sich in dieser Gleichung auf und wir können nicht nach der Endgeschwindigkeit des Blocks auflösen."

Studierende 3: "Ich denke, es ist nur möglich, dass das System eine Änderung der inneren Energie der Feder aufzeigt, wenn sich die Feder innerhalb dieses Systems befindet. Da sich die Feder außerhalb des Systems B befindet, ist die Änderung der inneren Energie von B null."

Fazit: Felder lagern Arbeit als innere Energie und erstatten diese Energie später zurück! Unser Block hat keine eigene innere Energie – vielmehr arbeiten Feder und Block aufeinander: Der Block lagert diese Arbeit als **kinetische** Energie und die Feder lagert sie als **innere** Energie.

Oszillation ist ein Energieschwappen zwischen verschiedenen Lagern

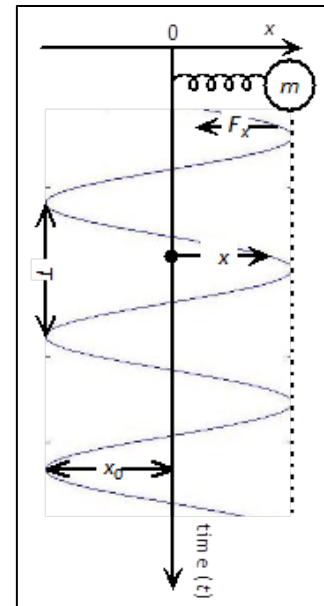
Während *Teilchen* Arbeit als *kinetische* Energie lagern, lagern *Felder* Arbeit als *innere* Energie. Federn sind ein handlich einfaches Beispiel für ein Feld mit eigener Potentialfunktion:

$$\mathbf{F}_S(\mathbf{x}) = -k \mathbf{x}; \quad \varphi_S(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} k x^2$$

Eine wichtige Frage bei solchen Lagersystemen ist: Können sie **Schwingungen** erzeugen, bei denen Größen wie Energie in einem sich wiederholenden Muster zwischen den Lagern hin und her fließen?

Rechts ist ein Oszillator, bei dem es sich beispielsweise um ein Wasserstoffatom kleiner Masse m handeln könnte, das durch Felder innerhalb eines sehr massereichen Wassermoleküls (H_2O) gebunden ist, das sich nur sehr wenig bewegt ...

- Wenn das H -Atom seine maximale Auslenkung $x = x_0$ vom Gleichgewichtspunkt $x = 0$ hat, ist das innere Energie-Lager E_I der Felder voll, aber das kinetische Energie-Lager E_K des H -Atoms ist leer, so dass das Atom kurzzeitig ruht;
- Dann fließt Energie als Arbeit (ΔW) vom Lager E_I in das Lager E_K , und das H -Atom beginnt sich zu bewegen;
- Bei der Gleichgewichts-Auslenkung $x = 0$ ist das Lager E_I leer und das H -Atom erreicht sein maximales Tempo (E_K ist „voll“);
- Ab diesem Gleichgewichtspunkt $x = 0$ fließt nun Energie als Arbeit (ΔW) aus dem Lager E_K in das Lager E_I , und das H -Atom wird langsamer;
- Bei der allerlinksten Auslenkung $x = -x_0$ ist das kinetische Lager E_K wieder leer und das innere Energie-Lager E_I wieder voll, dann schwingt das H -Atom weiter;
- Wenn das H -Atom wieder die Auslenkung $x = x_0$ erreicht, ist die erste vollständige Periode der Schwingung vorbei, und das Schwingen wiederholt sich ...



Nehmen wir an, dass die Felder, die das H -Atom binden, Hookes Gesetz gehorchen. In diesem Fall nennen wir das Verhalten des Atoms **harmonisch** (oder **SHM: Simple Harmonic Motion**). Nach Ablauf einer Zeitspanne T (die wir die Schwingungs**periode** nennen) wiederholt sich der Wert der Auslenkung x und setzt sich dann für einen weiteren Bewegungszyklus fort. Den maximalen Betrag von x bezeichnen wir als die **Amplitude** x_0 der Schwingung. Bei dieser maximalen Auslenkung ist die kinetische Energie des Oszillators kurzzeitig Null und seine innere Energie hat ihren maximalen Wert $\frac{1}{2}kx_0^2$. Da die Gesamtenergie ($E_K + E_I$) eines Oszillators konstant bleibt, muss sie diesem Maximalwert entsprechen, also gilt ganz allgemein für einen einfachen harmonischen Oszillator (**SHO**) :

$$E_{tot} \propto (\text{amplitude})^2$$

Untersuchen wir nun die *Form* einer harmonischen Bewegung:

- Newton 2 besagt, dass $F_s = dp/dt$, wobei p der Impuls des schwingenden Atoms ist. Kombiniere diese Gleichung mit Hookes Gesetz, um eine neue Gleichung zu erhalten, die die Größe F_s eliminiert.
- Welche Gleichung definiert den Impuls eines Teilchens?
- Angenommen, die Masse m des H -Atoms ist konstant. Verwende diese Tatsache, um die erste Ableitung in Deiner Federgleichung als zweite Ableitung umzuschreiben. Bringe diese Gleichung nun in die folgende Form:

$$\ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right) \cdot x$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist die Beschleunigung des H -Atoms und zeigt immer in die entgegengesetzte Richtung zur Auslenkung x . Daher muss die Größe (k/m) immer positiv sein, also können wir sie umschreiben, indem wir die **Phasenfrequenz** ω so definieren:

$$\omega^2 \equiv (k/m)$$

In dem Fall wird unsere Federgleichung äquivalent zur **harmonischen Gleichung**:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad \text{or} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

27. Konzentrieren wir uns auf Schwingungen entlang der einzigen Richtung \hat{x} der x -Achse. In diesem Fall hat die harmonische Gleichung diese Form:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Zeige, dass der Ausdruck $x_0 \sin(\omega t)$ eine Lösung dieser Gleichung ist.

28. Zeige, dass auch der Ausdruck $x_1 \cos(\omega t)$ eine Lösung dieser Gleichung ist.

29. Zeige, dass der Ausdruck $x_0 \sin(\omega t) + x_1 \cos(\omega t)$ auch noch eine Lösung ist.

30. Setze beliebige Werte für ω, x_0, x_1 ein und plote diesen Ausdruck mit Deinem Taschenrechner. Bestätige, dass das Ergebnis tatsächlich eine sinusförmige Lösung ist.

Im Allgemeinen hat harmonische Bewegung *immer* eine Sinusform, deswegen werden wir sie normalerweise in dieser einfachen Form schreiben:

$$x = x_0 \sin(\omega t)$$

31. Die **Frequenz** dieser Schwingung ist die Anzahl der Perioden pro Sekunde: $f = \frac{1}{T}$. Die Sinusfunktion wiederholt ihren Wert nach T Sekunden, also wenn $\omega T = 2\pi$. Eliminiere T aus diesen beiden Gleichungen, um die folgende wichtige Beziehung zwischen f und T zu vervollständigen:

$$\omega = \underline{\hspace{2cm}}$$

Maxwells Gleichungen unterstützen harmonische Schwingungen!

Hier sind Maxwells Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathcal{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$$

Wir nehmen an, dass wir uns im freien Raum befinden, also $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ und Maxwells Gleichungen werden zu:

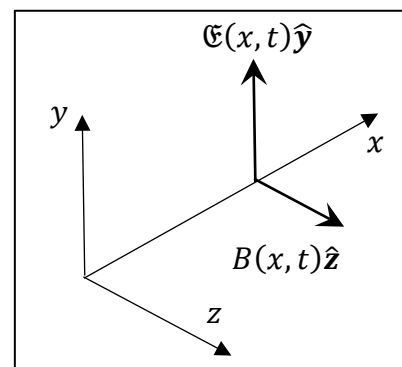
$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathcal{E} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$$

Außerdem nehmen wir an, dass die E- und B-Felder jeweils allein in die z - und y -Richtungen zeigen und sich nur entlang der x -Achse ändern. In diesem Fall gilt:

$$\mathcal{E}(x, t) = \mathcal{E}(x, t) \hat{y}; \quad \mathbf{B}(x, t) = B(x, t) \hat{z}$$

Ein solches Maxwell-Feld, dessen elektrisches Feld nur in *eine* Richtung zeigt, heißt **polarisiert**.

Wir werden später lernen, wie man all diese Vektoroperatoren in den Maxwell-Gleichungen auswertet; lehne Dich vorerst einfach zurück und genieße ☺:



Faradays Gesetz: $\frac{\partial}{\partial x} \times \mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial x} \times (\mathcal{E}(x, t) \hat{y}) = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \hat{z} = \frac{\partial B}{\partial t} \hat{z}$, also: $\boxed{\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t}}$

Maxwells Gesetz: $\frac{\partial}{\partial x} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial x} \times (B(x, t) \hat{z}) = \frac{\partial B}{\partial x} \hat{y} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \hat{y}$, also: $\boxed{\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}}$

Schließlich leiten wir die *erste* dieser beiden Gleichungen partiell nach x ab und setzen dann die *zweite* Gleichung in diese abgeleitete Gleichung ein:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}}$$

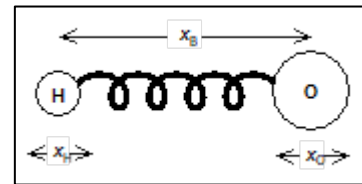
32. Diese letzte Gleichung heißt die **Wellengleichung** und hat sinusförmige Lösungen! Beweise, dass die Funktion $\mathcal{E}(x, t) \equiv \mathcal{E}_0 \sin(kx - \omega t)$ eine Lösung der Wellengleichung ist, wobei \mathcal{E}_0 die Amplitude der Schwingungen, ω die Phasenfrequenz und k eine Konstante ist, die die **Wellenzahl** heißt. Welche Bedingung müssen ω und k erfüllen, damit die Funktion $\mathcal{E}(x, t)$ tatsächlich als eine Lösung der Wellengleichung gilt? Wir diskutieren all diese Ideen in den kommenden Kapiteln weiter.

Fuß fassen

33. Verwende die Bedingung für ω und k , die Du in der vorherigen Frage gefunden hast, um die Maßeinheiten des Produkts $\mu_0 \varepsilon_0$ zu entdecken. Schlage nun die Werte von ε_0 und μ_0 nach und berechne aus ihnen die Lichtgeschwindigkeit!
34. Wir haben gezeigt, dass unser polarisiertes E-Feld die Wellengleichung erfüllt – kannst Du nun zeigen, dass das zugehörige polarisierte B-Feld auch die Wellengleichung erfüllt? Die Herleitung ist unserer obigen Arbeit sehr ähnlich. (*Hinweis: Beginne mit Maxwells Gesetz*)

Muskeltraining

35. Rechts ist ein Modell einer Hydroxylbindung: OH . Wasserstoff hat die Atommasse $m_H \approx 1.7 \times 10^{-28} \text{ kg}$, während Sauerstoff die Atommasse $m_O \approx 2.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ hat, also ist Sauerstoff etwa 16-mal massereicher als Wasserstoff. Nimm in erster Näherung an, dass das Sauerstoffatom in Ruhe fixiert ist, während das Wasserstoffatom an der Bindung zwischen ihnen schwingt. Diese OH -Bindung ist eine Feder mit Eigenlänge $x_B = 10^{-10} \text{ m}$ und Federhärte $k \approx 500 \text{ Nm}^{-1}$. Wie groß ist die **Phasenfrequenz** ω dieser Schwingung einer Hydroxylbindung? Welche **Frequenz** f hat die Schwingung? Schlage diese Frequenz online nach, um herauszufinden, welche Art von Licht benötigt wird, um diese Bindung zum Schwingen zu bringen.



Numerische Ergebnisse

35: [1.7×10^{15} ; $2.7 \times 10^{14} \text{ Hz}$]

Konstruktionsübung: Prüfungsvorbereitung!

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

???

Musterlösung:

Verfolgen

???

Teilnehmen

???

Abstrahieren

???

Anwenden

???

Ergebnis verfolgen

???

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

???