Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 26: Wie führt Veränderung zu Veränderung?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

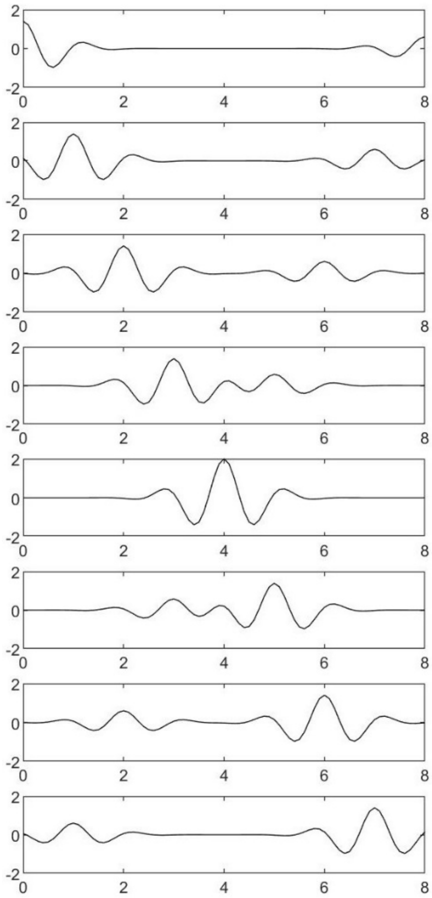
- Spiegelung und Überlagerung von Wellen in Schnur, Luft und Wasser beschreiben;
- Spiegelung und Überlagerung anwenden, um stehende Wellen zu erzeugen.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

Zwei Arten von Wellen: Transversal und longitudinal

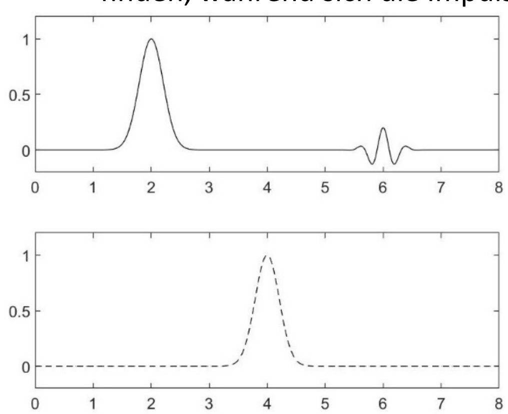
1. Stelle zunächst sicher, dass Du Dir die ersten drei kurzen Videoclips ansiehst: zu *Longitudinal waves*, *Transverse waves* und *General wave properties*.

***Superpositionsprinzip**: Wellen addieren sich*



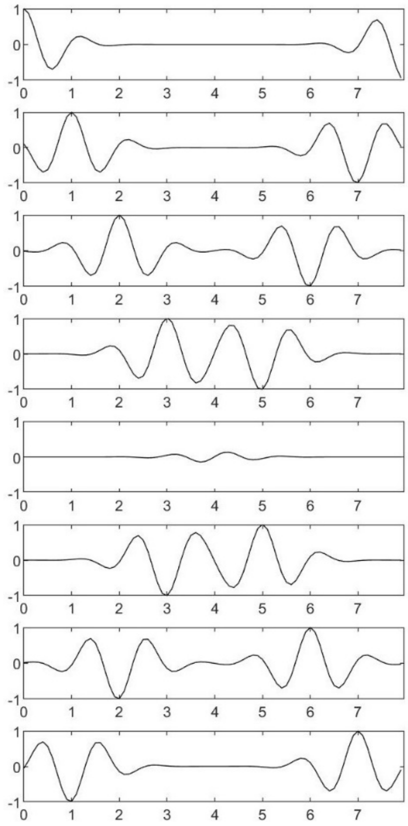
Die Schnappschüsse rechts sind in gleichen Zeitabständen aufgenommen und zeigen zwei Wellenimpulse, die sich entlang einer Feder von links und rechts annähern. *Beide* Wellen lenken die Feder nach oben aus.

2. Wenn sich die beiden Impulse treffen, bewegt sich jeder Impuls weiter in die gleiche Richtung, in die er sich ursprünglich bewegt hat, oder kehrt jeder Impuls seine Bewegungsrichtung um?
3. Begründe Deine Antwort anhand von Belegen aus den Diagrammen.
4. Wenn die Impulse in Schnappschuss 5 sich vollständig überlappen, wie unterscheidet sich diese Auslenkung von der Form der einzelnen Impulse?
5. Warum bezeichnen wir diese Situation in Schnappschuss 5 als ***konstruktive*** Überlagerung?
6. Beschreibe, wie Du das ***Superpositionsprinzip*** nutzen könnest, um die Form der Feder herauszufinden, während sich die Impulse überlappen.



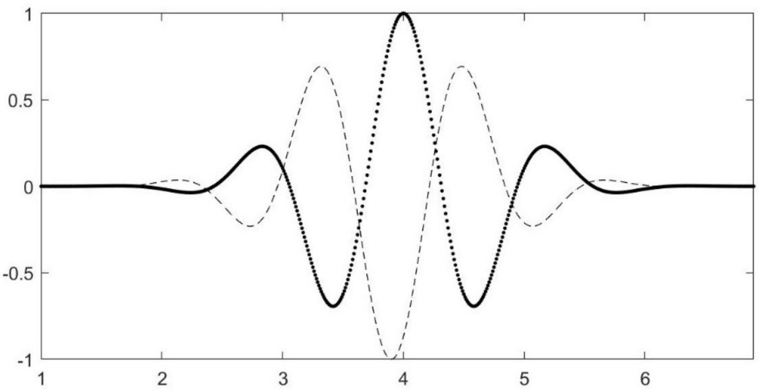
7. Im Diagramm links nähern sich zwei Impulse von links und rechts entlang einer Feder. Das untere Diagramm zeigt den linken Impuls kurze Zeit später, wenn er den Mittelpunkt $x = 4$ erreicht hat. Skizziere im unteren Diagramm die Form des rechten Impulses, wenn er auch $x = 4$ erreicht.
8. Skizziere im selben Diagramm die Form der Feder im Augenblick, als *beide* Impulse $x = 4$ erreichen.

Wir können Wellen destruktiv superponieren

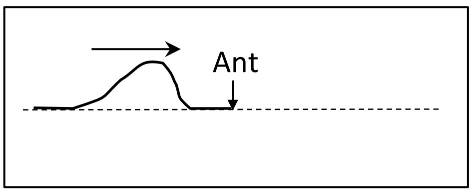


Diese nächsten Schnappschüsse rechts sind ebenfalls in gleichen Zeitabständen aufgenommen und zeigen zwei Impulse gleicher Breite und gleicher Amplitude, die sich entlang einer Feder von links und rechts annähern. Diese Impulse lenken die Feder in *verschiedene* Richtungen aus: einer nach oben und einer nach unten

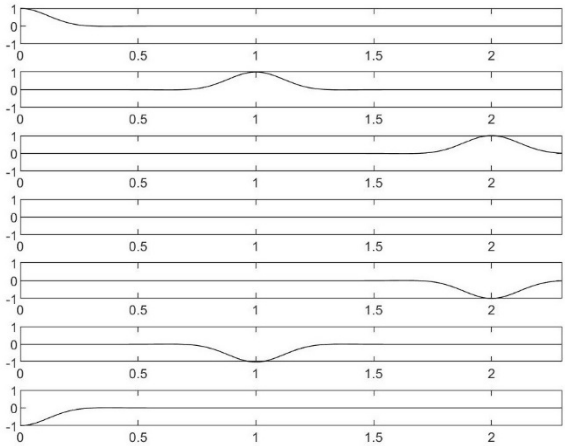
9. Stimmt das Verhalten der Feder mit dem Superpositionsprinzip überein? Wenn ja, welche Größen werden in diesem Fall „addiert"?
10. Unten ist ein Diagramm der beiden Einzelimpulse zu einem Zeitpunkt nahe dem Zeitpunkt des fünften Schnappschusses. Skizziere die Form der Feder zu diesem Zeitpunkt:



11. Erkläre, warum wir diese Situation als ***destruktive*** Überlagerung bezeichnen.
12. Konzentriere Deine Aufmerksamkeit in den Schnappschüssen auf den Mittelpunkt bei $x = 4$, wo sich die beiden Pulse treffen, und betrachte die hüpfige Erfahrung einer Ameise, die an diesem Punkt auf der Feder sitzt, während die beiden Impulse zusammenkommen und vorbeiziehen. Wie würde es sich auf die Bewegung der Ameise auswirken, wenn wir die Amplitude *beider* Impulse verdoppeln würden?
13. Wie würde es sich auf die Bewegung der Ameise auswirken, wenn wir die Amplitude *eines einzigen* Impulses verdoppeln würden?
14. Wie würde es sich auf die Bewegung der Ameise auswirken, wenn wir *die Breite* eines einzigen Impulses verdoppeln würden?
15. Rechts sehen wir einen asymmetrischen Impuls, der *nach rechts* auf unsere (eher besorgte) Ameise zuläuft. Du kannst sie vor Seekrankheit bewahren, wenn Du einen zweiten *Rettungs*impuls speziell entwickelst, der ihre Auf- und Abbewegung aufhebt, wenn die beiden Impulse aneinander vorbeilaufen. Zeige im Diagramm Form, Ort und Bewegungsrichtung des Rettungsimpulses zu dem im Diagramm gezeigten Zeitpunkt an.



Wir können Wellen reflektieren



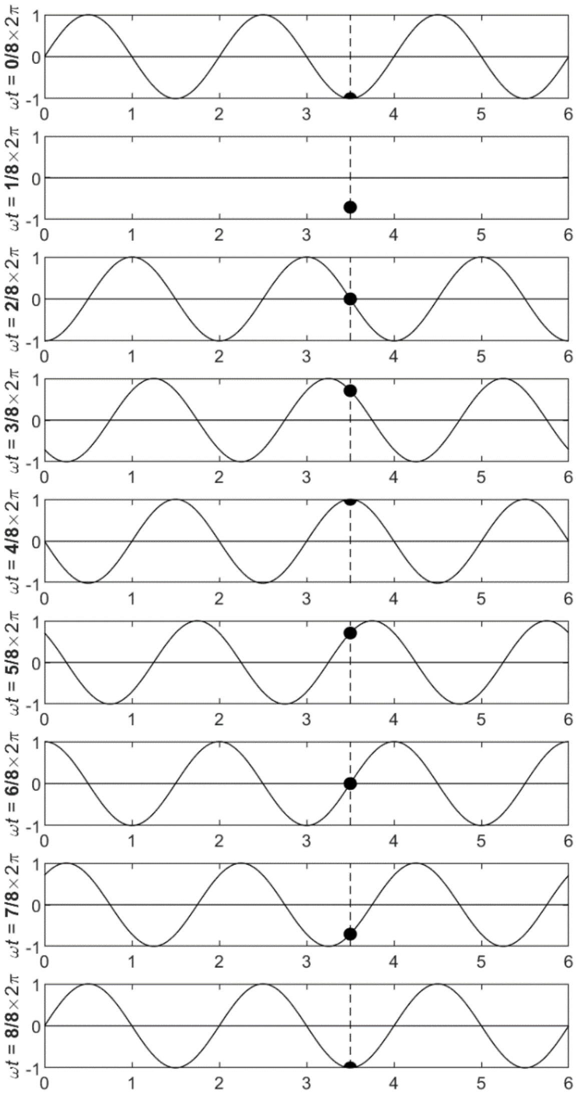
16. Die Schnappschüsse rechts zeigen einen Impuls, der sich zuerst nach rechts entlang einer Feder bewegt und dann von einer ***festen Grenze*** reflektiert wird, an der das rechte Ende der Feder fest gehalten wird. Beschreibe die Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen dem ***einfallenden Impuls*** (demjenigen Impuls, der sich der festen Grenze entgegen bewegt) und dem ***reflektierten Impuls***.
17. Verwende im vorherigen Schnappschuss-Diagramm (zu Aufgabe 9) ein Blatt Papier, um denjenigen Teil aller Schnappschüsse zu verdecken, der *rechts* vom Punkt $x = 4$ liegt. Wie vergleicht sich das Verhalten des unbedeckten *linken* Teils der Feder mit dem Federverhalten in diesem *neuen* Schnappschussdiagramm eines reflektierten Impulses?
18. Dies schlägt eine interessant Möglichkeit vor, über die Wellenreflexion an einer festen Grenze nachzudenken: Die Welle zieht nach oben gegen die Grenze, aber da die Grenze fest ist, wird die Welle nach unten gezogen, wodurch eine umgekehrte Welle entsteht, die sich nach hinten entlang der Feder ausbreitet. Siehe Dir nun den Filmclip über *Wave reflection* an. Beschreibe die Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen der Reflexion an einer ***festen Grenze*** und der Reflexion an einer ***freien Grenze***.

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

- Longitudinal waves
- Transverse waves
- General wave properties
- Wave reflection
- Standing waves fill their available space with half-wavelengths
- Superposed reflection forms standing waves

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt *gemeinsam*!

ω *beschreibt den Verlauf* , k *beschreibt die Form der Welle*



Im vorherigen Kapitel haben wir gesehen, dass wir einfache harmonische Wellen mit dieser einfachen Wellenlösung beschreiben können:

$$y(x,t) = y_0 \, sin(kx - \omega t)$$

Wir wollen diese Lösung auspacken, um herauszufinden, wie sie funktioniert. Das rechte Diagramm zeigt die zeitliche Abfolge von Schnappschüssen einer Welle, die sich entlang einer Feder nach rechts bewegt, und unsere (mittlerweile definitiv ziemlich seekranke) Ameise sitzt auf der Position $x = 3.5\text{ m}$. Das Zeitintervall zwischen jedem Schnappschuss und dem nächsten beträgt 1 s.

19. Eine Welle hat sowohl *Form* als auch *Verlauf*. Konzentriere Dich jetzt auf den obersten Schnappschuss. Beachte, dass die Welle zu diesem Zeitpunkt t eine bestimmte ***räumliche Form*** entlang der x-Achse besitzt: eine Reihe von Bergen und Tälern. Der Abstand von einem Berg zum nächsten heißt die ***Wellenlänge*** λ der Welle. Welche Wellenlänge hat diese Welle?
20. Konzentriere Dich als Nächstes auf unsere Ameise bei $x = 3.5\text{ m}$. Beachte, dass die Welle an diesem Raumpunkt x einem ***zeitlichen Verlauf*** durch die Zeit folgt: einem Zyklus von $y = -1$ bis to $y = 1$, dann zurück zu $y = -1$. Die Zeit, die die Ameise braucht, um einen ganzen Zyklus zu durchlaufen, heißt die ***Periode*** T der Welle. Welche Periode hat diese Welle?
21. Die Periode der Welle sagt uns, wie viele Schnappschüsse wir durchlaufen, wenn wir einem einzelnen Zyklus folgen. Die ***Frequenz*** f der Welle beschreibt dagegen die Anzahl der Zyklen, die vergehen, wenn wir von einem Schnappschuss zum nächsten wechseln. Welche Frequenz hat diese Welle? Das heißt, wie viele Zyklen führt sie pro Sekunde durch?
22. Schreibe eine einfache mathematische Gleichung für die Beziehung zwischen f und T.
23. Daher bewegt sich die Welle während einer Zeitperiode T nach rechts um eine Strecke λ, so dass das Tempo der Welle $c = \lambda/T$ sein muss. Vervollständige die folgende Gleichung, die das Tempo c der Welle mit ihrer Frequenz f in Beziehung setzt:

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \_\_\_\_$$

OK, wir wollen nun den *Verlauf* der Welle anhand der trigonometrischen Funktion $\sin(\,)$ beschreiben, aber trigonometrische Funktionen arbeiten nicht mit ganzen Zyklen, sondern mit

Winkeln. Um weiter zu kommen, müssen wir erkennen, dass Winkel nicht nur *Ecken* (also Bruchteile einer $360°$-Drehung) messen können, sondern im Allgemeinen können Winkel wirklich *alles* messen, was sich in Zyklen wiederholt: Drehungen, Wochen, Schwingungen und insbesondere *Wellen* …

24. Verwende diese Idee von Winkeln als Messeinheit einer Wiederholung, um den *Verlauf* einer Welle zu beschreiben. Jeder Zyklus der Welle ist ein *zeitlicher Verlauf*, der sich nach einem Winkel von 2π Radianten wiederholt. Wenn also T die Zeitperiode ist, die eine Welle benötigt, um einen *vollständigen* Zyklus abzulegen, wie viel Zeit braucht die Welle dann, um nur *einen Radianten* abzulegen?
25. Verwende dieses Ergebnis, um eine Formel für die ***Phasenfrequenz*** ω der Welle zu finden. Dies ist die Anzahl der Radianten, die eine Welle innerhalb einer Sekunde zurücklegt. Vervollständige dann die folgende Gleichung in Bezug auf ω and f:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \_\_\_\_\_\_$$

26. Verwende nun diese Idee von Winkeln als Messeinheit einer Wiederholung, um die *Form* einer Welle zu beschreiben. Jeder einzelne Zyklus der Welle ist eine *räumliche Form*, die sich nach einem Winkel von 2π Radianten wiederholt. Wenn also λ der Wellenlänge-Abstand ist, den eine Welle innerhalb eines *vollständigen* Zyklus zurücklegt, wie viel Abstand legt die Welle dann zurück, wenn sie nur *einen Radianten* ablegt?
27. Verwende dieses Ergebnis, um eine Formel für die ***Wellenzahl*** k der Welle zu finden. Dies ist die Anzahl der Radianten, die eine Welle innerhalb *eines Meters* beinhaltet. Vervollständige dann die folgende Gleichung in Bezug auf k and λ:

$$k = \frac{2\pi}{(\_\_\_\_)}$$

28. Verwende die Gleichungen, die Du bisher entdeckt hast, um die folgende wichtige Gleichung auszufüllen:

$$\_\_\_\_ = \frac{\omega}{k}$$

29. Ein zusätzlicher Aspekt der Form einer Wellen ist ihre Amplitude: die maximale vertikale Auslenkung y_0 der Feder weg von der Gleichgewichtslage $y = 0$ in y-Richtung. Welche Amplitude hat unsere Welle?

Die Form der Wellenlösung bewegt sich mit der Zeit nach rechts

Jetzt wirst Du sehen, wie sich die Wellenlösung $y(x,t) = y_0\, sin(kx - \omega t)$ entlang der x-Achse bewegt. Beachte, dass die Welle im zweiten Schnappschuss im vorigen Diagramm noch nicht eingezeichnet ist – das wirst *Du* jetzt erledigen!

30. Der erste Schnappschuss wird zum Zeitpunkt $t = 0$ s erstellt. Setze diesen Wert in die Wellenlösung $y(x,t)$ ein, um diejenige Funktion zu finden, die die räumliche Form des ersten Schnappschusses angibt.
31. Der zweite Schnappschuss wird zum Zeitpunkt $t = \frac{2\pi}{8\omega}$ aufgenommen. Setze diesen Wert in die Wellenlösung $y(x,t)$ ein, um diejenige Funktion zu finden, die die räumliche Form des zweiten Schnappschusses angibt.
32. Beachte, dass die Funktion im zweiten Schnappschuss dieselbe ist wie im ersten Schnappschuss, jedoch mit einem konstanten Phasenwinkel, der vom Argument

subtrahiert wird. Wie viele Radianten beträgt dieser konstante Phasenwinkel? Welcher Bruchteil einer kompletten Welle ist dieser Phasenwinkel?

33. Wir haben in einem früheren Kapitel gesehen, dass das *Subtrahieren* einer Konstanten vom Argument einer Funktion diese Funktion entlang der x-Achse *verschiebt*. In welche Richtung geht diese Verschiebung?
34. Verwende diese Informationen, um die Welle im zweiten Schnappschuss zu skizzieren.
35. Erkläre, wie dieser Prozess zur Wellenform im dritten Schnappschuss führt.

Die Summe einer Welle und ihrer Reflexion ist eine stehende Welle

36. Schaue die beiden Filmclips „Standing waves fill their available space with half-wavelengths“ und „Superposed reflection forms standing waves“ an.
37. Wenn die Länge einer Gitarrensaite L ist, welche Wellenlängen λ würden entlang der Saite passen und gleichzeitig die Eigenschaft erfüllen, dass beide Enden der Saite fixiert sind?
38. Verwende dieses Ergebnis, um die Gleichung $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ für Medien mit zwei festen Enden herzuleiten.
39. Wenn die Länge einer Flöte L ist, welche Wellenlängen λ würden entlang der Flöte passen und gleichzeitig die Eigenschaft erfüllen, dass ein Ende der Flöte fest und ein Ende offen ist?
40. Verwende dieses Ergebnis, um die Gleichung $\lambda_n = \frac{4L}{2n+1}$ für Medien mit einem festen und einem offenen Ende herzuleiten.
41. Leite eine Bedingung für stehende Wellen in Röhrenglocken her, bei den beide Enden offen sind.

Fuß fassen

42. Überträgt eine Welle Materie *oder* Energie von einem Ort zum anderen?
43. Erkläre die zwei Welleneigenschaften *Superposition* und *Reflektion*.
44. Schreibe die Beziehung zwischen *Frequenz* und *Periode* einer Welle auf.
45. Schreibe die Beziehung zwischen *Phasenfrequenz* und *Periode* einer Welle auf.
46. Schreibe die Beziehung zwischen *Wellennummer* und *Wellenlänge* einer Welle auf.
47. Was sind die Einheiten von *Frequenz*, *Auslenkung* und *Amplitude*?
48. Schreibe die Gleichung auf, die c, λ und f verbindet.
49. Schreibe die Gleichung auf, die c, k und ω verbindet.
50. Gib ein Beispiel einer transversalen und einer longitudinalen Welle an.
51. Was passiert, wenn ein Wellenberg auf ein etwas kleineres Tal trifft?
52. Sind sich zwei Punkte einer Welle mit Phasendifferenz 1440° in Phase?
53. Gib die Bedingungen an, die erfüllt werden müssen, wenn destruktive Superposition zwischen zwei Wellen stattfinden soll.

Muskeltraining

54. Eine Boje oszilliert durch eine ganze Periode hinauf und herunter in 6 s. Der Höhenunterschied zwischen den höchsten und tiefsten Punkten ist 1.2 m und die Wellen bewegen sich mit $3\ \mathrm{ms}^{-1}$ an der Boje vorbei. (a) Wie lang sind die Wellen? (b) Was ist die Amplitude der Wellen?

55. Ein Mikrofon steht auf der Linie zwischen zwei Lautsprechern und ist gleich weit entfernt von beiden. Beide Lautsprecher empfangen ein Signal von der gleichen Quelle und geben deswegen genau denselben Ton ab: einen stetigen Ton mit Frequenz 220Hz. Das Mikrofon empfängt ein Intensitäts*maximum* von den zwei Lautsprechern. Was ist

der minimale Abstand (auf ein Zentimeter genau), um den das Mikrofon in die Richtung eines Lautsprechers verschoben werden muss, damit der Schall am Mikrofon ein Intensitäts*minimum* erreicht? (Schallgeschwindigkeit in Luft ist 330ms^{-1}.)

Numerische Ergebnisse

54: [(a) 18 m; (b) 0.6 m]

Konstruktionsübung: *Prüfungsvorbereitung*!

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

???

Musterlösung:

Verfolgen

???

Teilnehmen

???

Abstrahieren

???

Anwenden

???

Ergebnis verfolgen

???

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

???