Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 29: Wie verwende ich die Logarithmus-Funktion?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

- Logarithmusregeln anwenden, um algebraische Gleichungen mit Exponenten zu lösen.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

exp: Konstante Zeitschritte ergeben gleichmäßiges Vervielfachen

log: Gleichmäßige Vervielfachen ergibt konstante Wertschritte

1. Meine Hefezelle Jeff verdoppelt stündlich seine Population: $J(t) = J_0 \cdot 2^t$. Er beginnt mit einer Population $J(0) = J_0 = 1$. Nach wie vielen Stunden enthält die Population 2 Zellen?
2. Nach wie vielen Stunden ist $J = 4? 8? 16? 32?$
3. Und nun die schwierige Frage: Nach wie vielen Stunden ist $J = 3$? Schätze Deine Antwort vorerst einfach aus dem Graph von Jeffs Entwicklung in Kapitel 27 ab.

Dies ist eine schwierige Frage: Sobald wir wissen, wie viele Stunden vergangen sind, können wir Jeffs Bevölkerung berechnen, indem wir 2 zu dieser Potenz erhöhen. Es ist aber nicht so einfach, von der Bevölkerungsgröße auf die Stundenzahl zurückzuarbeiten. Dies ist die Aufgabe der *Logarithmus-Funktion*:

- Angenommen, wir wissen, dass y eine Exponentialfunktion zur Basis b von x ist. Oder mit anderen Worten: $y = \exp_b(x) \equiv b^x$;
- dann können wir auch rückwärts von x zu y berechnen, indem wir die ***Logarithmus-Funktion*** zur Basis b verwenden: $x = \log_b(y)$.
- *Betrachte es so*: $\exp(\,)$ *hebt* den Wert x von der Zeilenebene nach oben zur Potenz-ebene, während $\log(\,)$ ihn wieder von der Potenzeben zur Zeilenebene *herunterholt*.

Logarithmus ist also die *Umkehrfunktion* der Exponentialfunktion:

$$\log_b(\,) \equiv \exp_b^{-1}(\,)\,; \quad \exp_b(\,) \equiv \log_b^{-1}(\,)$$

$$x \underset{\log_b}{\overset{\exp_b}{\rightleftarrows}} y$$

$$\log_b(\exp_b(x)) \equiv \exp_b(\log_b(x)) \equiv x$$

Falls wir die Basis $e = 2.718\cdots$ verwenden, nennen wir dies die ***natürliche Logarithmus-Funktion***:

$$\ln(x) \equiv \log_e(x)$$

4. Was ist der Wert von 10^2? Was ist der Wert von $\log_{10}(100)$?

Ein Logarithmus ist also ganz einfach der Exponent unserer ausgewählten Basis:

- $x = \log_a(y)$ bedeutet: *“x ist der Exponent von a, der mir die Antwort y gibt”*, z.B.:
- $2 = \log_{10}(100)$ bedeutet: *“2 ist der Exponent von 10, der mir die Antwort 100 gibt”*.

Zum Beispiel:

5. Was ist der Wert von $\log_{10}(1000)$? Was ist $\log_{10}(10^7)$?
6. Was ist $\log_{10}(0.1)$? Was ist $\log_{10}(0.001)$?
7. Was ist $\log_2(4)$? Was ist $\log_2(8)$? $\log_2(32)$? $\log_2(1)$? $\log_2(2)$? Was ist $\log_2\left(\frac{1}{4}\right)$?
8. Was ist $\log_3(9)$? Was ist $\log_3(27)$? Was ist $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$?
9. Was ist $\log_e(e)$? Was ist $\log_e(1)$? Was ist $\log_e(e^2)$? $\log_e\left(\frac{1}{e}\right)$? Was ist $\log_e\left(\frac{1}{e^2}\right)$?
10. Verwende Deine Antworten zu Aufgabe 7, um diese zwei Gleichungen zu überprüfen:

$$\log_2(8) = \log_2(2) + \log_2(4)\,; \quad \log_2(8) = \log_2(32) - \log_2(4)$$

    Beachte, wie Logarithmen Multiplikation in Addition umwandeln, und Division in Subtraktion. Als ich in der Schule war, mussten wir diese Regel benutzen, um große Zahlen zu multiplizieren, weil es damals noch keine Taschenrechner gab.

11. Was ist das Produkt der zwei Zahlen $u = b^x$ und $v = b^y$? Verwende dieses Ergebnis, um den Wert von $\log_b(uv)$ als Summe zweier Logarithmen auszudrücken. Was ist der Wert von $\log_b(u/v)$?
12. Skizziere einen Graph der Funktion $\log_2(t)$ über den Bereich $0 \le t \le 8$ in den Achsen rechts. Wusstest Du, dass der Logarithmus-Graph langsamer ins Unendliche geht als *jedes mögliche* Polynom?

$\log_2(t)$								
2								
1								
-1		2		4		6		t
-2								
-3								

13. Verwende Deinen Taschenrechner, um auf diesen Achsen den Graph der Funktion $x(t) = \ln(t)$ zu zeichnen.

Tipp: Um den Logarithmus zu einer anderen Basis b zu berechnen, verwende diese Formel:

$$\log_b(x) \equiv \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

14. Jetzt haben wir die Werkzeuge, um unsere vorige Frage zu beantworten: Nach wie vielen Stunden hat meine Hefezelle Jeff eine Population von $J = 3$ produziert? Wir wissen, dass $J(t) = 2^t$, also setze $J(t) = 3$ und nimm den Logarithmus zur Basis 2 beider Seiten. Verwende schließlich die vorige Identität:

$$\log_2(3) \equiv \frac{\log_e(3)}{\log_e(2)} =$$

    Stimmt diese Antwort mit Deiner Antwort aus Aufgabe 3 oben?

15. Schreibe diese Ausdrücke mit Logarithmen anstelle von Potenzen: (a) $8^2 = 64$; (b) $3^5 = 243$; (c) $2^{10} = 1024$; (d) $5^3 = 125$; (e) $10^6 = 1000000$; (f) $10^{-3} = 0.001$; (g) $3^{-2} = \frac{1}{9}$; (h) $6^0 = 1$; (i) $5^{-1} = \frac{1}{5}$; (j) $\sqrt{49} = 7$; (k) $27^{2/3} = 9$; (l) $32^{-2/5} = \frac{1}{4}$.
16. Werte diese Logarithmen aus, *ohne* Verwendung eines Taschenrechners: (a) $\log_3(9)$; (b) $\log_2(32)$; (c) $\log_5(125)$; (d) $\log_{10}(10000)$; (e) $\log_4(64)$; (f) $\log_{25}(5)$; (g) $\log_8(2)$;

(h) $\log_{81}(3)$; (i) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$; (j) $\log_7(1)$; (k) $\log_8\left(\frac{1}{8}\right)$; (l) $\log_a(a^5)$; (m) $\log_c(\sqrt{c})$; (n) $\log_e\left(\frac{1}{e^3}\right)$.

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

- Logarithmen verwandeln Multiplikation/Division in Addition/Subtraktion
- … und Potenzen in Produkte; die Basis können wir auch leicht wechseln
- Nutzen: Logarithmen können Gleichungen unheimlich vereinfachen!

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt *gemeinsam*!

Die Logarithmus-Regeln sind die Potenzregeln, aber anders herum

$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$	$\log_a(x) = \log_b(x)/\log_b(a)$	$\log_b(x^y) = y\log_b(x)$
$\log_b(x/y) = \log_b(x) - \log_b(y)$	$\ln(x) \equiv \log_e(x)$	$\log_b(1) = 0$

Fuß fassen

17. Berechne diese Werte ohne Taschenrechner: (a) $\log_3 27$; (b) $\log_3 1/27$; (c) $\log_3 18 - \log_3 2$.
18. Vereinfache: (a) $\log 3 + 2\log 5$; (b) $\frac{1}{2}\log 36 - \log 3$; (c) $\log 2 - \frac{1}{4}\log 16$.
19. Vereinfache: $\log_b(x^2 - 1) - \log_b(x - 1)$.
20. Löse diese Gleichungen: (a) $10^x = 240$; (b) $\log_{10} x = 5.3$; (c) $10^{2x+1} = 1500$; (d) $4^{(x-1)} = 200$.
21. Finde das kleinste Integer $n \in \mathbb{Z}$, für das gilt: $1.5^n > 1\,000\,000$.

Muskeltraining

22. Schreibe diese Ausdrücke in die Form $\log_a n$, wobei $n \in \mathbb{Z}$: (a) $\log_a 20 - 2\log_a 2$; (b) $\frac{1}{2}\log_a 16 + \frac{1}{3}\log_a 27$.
23. Berechne: (a) $\log_2 64$; (b) $2\log_3 9$.
24. Berechne auf 4 Dezimalstellen genau: (a) $\log_6 25$; (b) $\log_3 10 + \log_3 2$.
25. (a) Löse auf 2 Dezimalstellen genau: $2^x = 9$; (b) Löse daher: $2^{2x} - 13(2^x) + 36 = 0$.
26. Löse die Gleichung $\log_7(y + 3) + \log_7(2y + 1) = 1$, wobei $y > 0$.
27. (a) Löse diese Gleichung genau: $\log_3 x = -\frac{1}{2}$; (b) Finde eine genaue Lösung: $2\log_3 x = -4$.
28. (a) Berechne x auf 3 signifikante Stellen genau, wenn $6^{(3x+2)} = 9$. (b) Berechne y auf 3 signifikante Stellen genau, wenn $3^{(y^2-4)} = 7^{(y+2)}$.
29. Für $p, q \in \mathbb{Z}^+$ gilt: $\log_4 p - \log_4 q = \frac{1}{2}$. (a) Zeige, dass $p = 2q$. (b) Löse diese Gleichung für p und q: $\log_2 p + \log_2 q = 7$.
30. Verwende Logarithmen um diese Gleichungen zu lösen: (a) $10^x = 5$; (b) $e^x = 8$; (c) $10^x = \frac{1}{2}$; (d) $e^x = 0.1$; (e) $4^x = 12$; (f) $3^x = 2$; (g) $7^x = 1$; (h) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{100}$; (i) $\pi^x = 10$; (j) $e^x = \pi$; (k) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2$; (l) $10^x = e^{2x-1}$.
31. Lebende Pflanzen enthalten ein konstantes Verhältnis der beiden Kohlenstoffisotope ^{12}C und ^{14}C. Wenn sie jedoch sterben, sinkt der Anteil des radioaktiven ^{14}C, da dies radioaktiv zerfällt und nicht mehr durch Atmung aus der Atmosphäre aufgestockt wird, sodass ihr ^{14}C-Gehalt die Zeit seit dem Absterben der Pflanze misst. Die Hälfte der ^{14}C-Kerne zerfällt in 5730 Jahren zu ^{12}C. In den nächsten 5730 Jahren zerfällt die Hälfte der

verbleibenden ^{14}C -Kerne zu ^{12}C, sodass ein Viertel der ursprünglichen Zahl übrig bleibt und so weiter. Dieses Zeitintervall, $T_{1/2} = 5730\,\mathrm{yr}$, wird als ***Halbwertszeit*** von ^{14}C bezeichnet. Drücke den ^{14}C -Gehalt mit der Exponentialfunktion aus: $C(t) = C_0 \cdot e^{-t/\tau}$ und berechne die ***Abklingzeitkonstante*** τ.

32. Wenn wir die Radiokarbon-Datierung auf einem 500-600 Jahre alten Gemälde verwenden, berechne den Anteil der ^{14}C -Kerne, die seit der Herstellung des Gemäldes zerfallen sind.

Numerische Ergebnisse

- 17: $[3;\ -3; 2]$
- 18: $[\log 75\,; \log 2\,; 0]$
- 19: $[\log_b(x+1)]$
- 20: [2.380; 200000; 1.088; 4.822]
- 21: [35]
- 22: $[\log_a 5\,; \log_a 12]$
- 23: [6; 4]
- 24: [1.7965; 2.7268]
- 25: [3.17; 2, 3.17]
- 26: $[\frac{1}{2}\ (\text{nicht} - 4)]$
- 27: $[\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{9}]$
- 28: $[-0.258; 3.77]$
- 29: $[q = 8; p = 16]$
- 30: [(a) 0.699; (b) 2.079; (c) -0.301; (d) -2.303; (e) 1.792; (f) 0.631; (g) 0; (h) 6.644; (i) 2.011; (j) 1.145; (k) -0.631; (l) -3.305]
- 32: $[\approx 0.05]$

Konstruktionsübung: *Prüfungsvorbereitung*!

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Finde die Lösung dieser Gleichung auf 3 signifikante Stellen genau: $6^{(2x-1)} = 9$.

Musterlösung:

Verfolgen

Die Gleichung $6^{(2x-1)} = 9$ beinhaltet eine Exponentialfunktion. Die Basis der Exponentialfunktion ist nicht die e-Funktion sondern die Zahl 6.

Teilnehmen

Wir können die Gleichung nach x erst auflösen, wenn wir die Variable nicht mehr als Potenz stehen haben. Um eine Exponentialfunktion zu invertieren, bilden wir den Logarithmus zur jeweiligen Basis.

Abstrahieren

1. Benütze den Logarithmus zur Basis 6 um die Gleichung anhand umzuformen.
2. Löse die neue Gleichung nach x auf. Beachte die 3 signifikante Stellen Genauigkeit!

Anwenden

1.

$$6^{(2x-1)} = 9$$

$$\Longrightarrow \quad 2x - 1 = \log_6(9)$$

2.

$$\Longrightarrow \quad 2x = \log_6(9) + 1$$
$$\Longrightarrow \quad x = \frac{\log_6(9)+1}{2} = \underline{1.11}$$

Ergebnis verfolgen

Das Ergebnis klingt plausibel, da der Wert 9 zwischen 6^1 und $6^2 = 36$ liegt. Da 9 zudem viel näher bei 6 liegt als bei 36, erwarten wir eine Potenz von 6, die nur etwas größer ist als 1. Unsere Lösung für $x = 1{,}11$ führt zu einer Potenz von 1,22. Dieser Wert liegt im erwarteten Bereich.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Finde die Lösung dieser Gleichung auf 3 signifikante Stellen genau: $3^{(y^2-4)} = 7^{(y-2)}$.