Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 30: Woher wissen wir, ob etwas eine Welle ist?

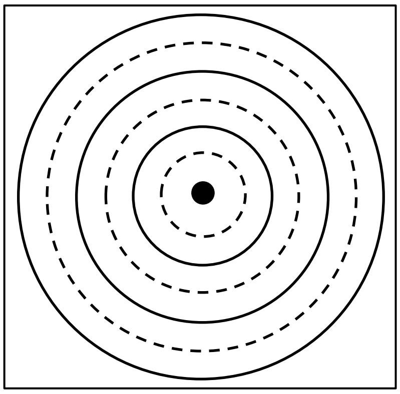
ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

- Ein- und Doppelspaltinterferenz von Licht erklären.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

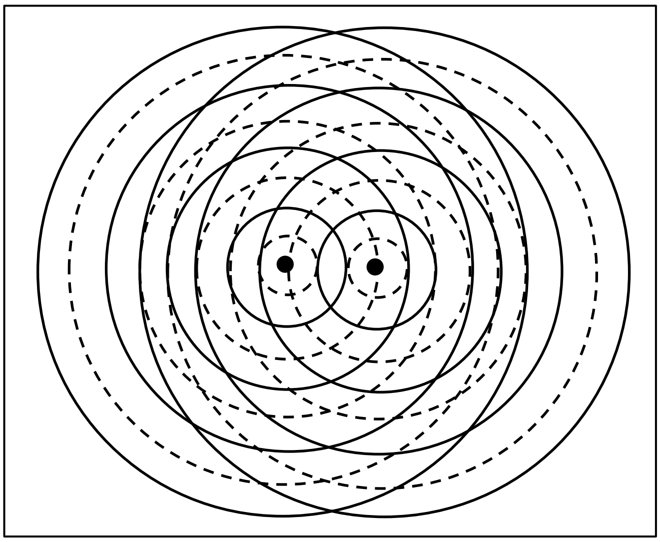
Kohärente Quellen erzeugen Interferenz

- Zwei Wellen sind ***kohärent***, wenn sie beide monochromatisch sind (nur eine Frequenz enthalten), die gleiche Frequenz und Amplitude haben und zueinander in Phase sind.
- Licht aus zwei verschiedenen Quellen ist fast immer ***inkohärent***: Es besteht aus mehreren verschiedenen Frequenzen, die zueinander phasenverschoben sind und unterschiedliche Amplituden haben.
- Wenn Licht von zwei *inkohärenten* Quellen zusammenkommt, sehen wir nichts Interessantes – nur dass das Licht von beiden heller ist als von jeder einzelnen Quelle.
- Wenn jedoch Licht von zwei *kohärenten* Quellen zusammentrifft, verursacht deren Überlagerung ***Interferenz*** …



Die Kreise rechts stellen kreisförmige periodische Wellenfronten dar, die sich von einem einzelnen Punkt in einem Ripple-Tank nach außen ausbreiten. Die durchgezogenen Kreise stellen ***Wellenberge*** dar; die gestrichelten Kreise stellen ***Wellentäler*** dar. Das Diagramm zeigt eine Momentaufnahme der Wellenfronten zu einem bestimmten Zeitpunkt.

1. Wie, wenn überhaupt, würde das Diagramm eine Viertelperiode später anders aussehen? Begründe.
2. Wie würde das Diagramm eine komplette Periode später anders aussehen? Begründe.
3. Dieses nächste Diagramm rechts zeigt eine Momentaufnahme kreisförmiger Wellenfronten, die sich von zwei kleinen kohärenten Quellen nach außen ausbreiten. Wie vergleichen sich die Frequenzen der beiden Quellen? Erkläre, wie Du dies anhand des Diagramms feststellen kannst.



4. Sind die Quellen phasengleich oder phasenverschoben? Erkläre, wie Du dies anhand des Diagramms feststellst.
5. Wie viele Wellenlängen liegen zwischen den beiden Quellen?
6. Beschreibe, was an einem Punkt auf der Wasseroberfläche passiert, wo: (a) ein Berg auf einen Berg trifft; (b) ein Tal auf ein Tal trifft; und (c) ein Berg auf ein Tal trifft.
7. Beschreibe für jeden dieser drei Fälle, wie sich Deine Antwort unterscheiden würde, wenn die Amplituden der beiden Wellen *nicht* gleich wären.

Wenn die Wellen von zwei kohärenten Quellen unterschiedliche Entfernungen zurücklegen, um einen bestimmten Punkt zu erreichen, werden die Amplituden der Wellen von den beiden Quellen auch unterschiedlich sein. Für Punkte, die ausreichend weit von den Quellen entfernt sind, ist dieser Amplitudenunterschied jedoch gering und wir werden ihn deswegen für den Rest dieses Kapitels ignoriert.

Interferenz erzeugt Bewegungsmuster

8. Markiere im vorigen Diagramm ein kleines Kreuz (×) an dejenigen Punkten, an denen *für den Moment dieses Schnappschusses* die Auf-Ab-Auslenkung der Wasseroberfläche Null ist (d. h. auf ihrem Gleichgewichtsniveau).
9. Markiere einen kleinen *ausgefüllten* Punkt (●) an den Stellen, an denen diese Auslenkung *oberhalb* des Gleichgewichtszustands am größten ist, und markiere einen kleinen, *ungefüllten* Kreis (○) an den Stellen, an denen diese Auslenkung *unterhalb* des Gleichgewichtszustands am größten ist.
10. Welche Muster fallen Dir auf?
11. Du solltest feststellen, dass Deine Kreuze gekrümmte Strahlen bilden, die sich von der Mitte des Diagramms aus erstrecken. Zeichne eine glatte gekrümmte Linie, die die Kreuze innerhalb jedes einzelnen Strahls verbindet.
12. Du solltest auch bemerken, dass sich die gefüllten Punkte mit den ungefüllten Kreisen auf gekrümmten Pfaden abwechseln, die zwischen diesen Strahlen nach außen führen. Verwende eine Wackellinie (∿), um die abwechselnden Punkte entlang jedes einzelnen Pfads zu verbinden.
13. Deine bisherige Konstruktion zeigt die Form der Wasseroberfläche *zu einem bestimmten Zeitpunkt*. Konzentriere Dich nun auf einen einzelnen gefüllten Punkt (●) in Deinem Diagramm, wo ein Berg auf einen Berg trifft. Wie würde sich die Auslenkung der Wasseroberfläche an dieser Stelle im Laufe der Zeit ändern? Wie hoch wäre zum Beispiel die Auslenkung eine Viertelperiode später? Und eine halbe Periode später?
14. Überlege nun, was an einer Stelle in Deinem Diagramm passiert, an dem ein Berg auf ein Tal trifft. Wie wird sich die Auslenkung der Wasseroberfläche an dieser Stelle im Laufe der Zeit ändern?
15. Angenommen, ein kleiner Korken schwimmt auf der Wasseroberfläche. Verwende Dein Diagramm, um vorherzusagen, wo sich der Korken am *wenigsten* bewegen würde und wo er am *stärksten* auf und ab wippen würde.

Interferenzmuster sind ein stabiles Muster regelmäßiger Bewegung

16. Betrachte einen Punkt, an dem die Wasseroberfläche ungestört bleibt (×). Erkläre, warum dieser Punkt *nicht* den gleichen Abstand von beiden Wellenquellen haben kann.
17. Betrachte die Abstände zwischen diesem Punkt und den beiden Wellenquellen; um wie viel müssen sich diese beiden Entfernungen unterscheiden? Drücke diese Differenz in Bezug auf eine entsprechende Anzahl der Wellenlängen λ aus.

18. Gibt es mehr als einen möglichen Wert für diese Abstandsdifferenz? Wenn ja, liste die anderen möglichen Werte für die Abstandsdifferenz auf. Begründe.
19. Wähle mehrere verschiedene Punkte, an denen die Wasseroberfläche ungestört bleibt (×). Messe für jeden dieser Punkte die Differenz zwischen den Abständen (in Wellenlängen) vom Punkt zu den beiden Quellen. Wir nennen diese Differenz ΔD, die oft als ***Weglängendifferenz*** bezeichnet wird.
20. Trenne alle (×) Punkte, an denen die Wasseroberfläche ungestört bleibt, in Gruppen von Punkten, die alle den gleichen Wert von ΔD haben. Beschrifte jede Gruppe nach ihrem Wert von ΔD in Wellenlängen λ.
21. Begründe den Namen ***Knotenlinie*** für diese Punktgruppen.
22. Was ist die Verbindung zwischen Knotenlinien und den gekrümmten Strahlen, die Du zuvor gezeichnet hast?
23. Trenne auf ähnliche Weise die Punkte, an denen eine maximale konstruktive Interferenz (●,○) vorliegt, in Gruppen mit gleichem Wert von ΔD. In welcher Beziehung stehen diese zu den Wackellinien, die Du zuvor gezeichnet hast?
24. Beschrifte jeden gekrümmten Strahl und jede Wackellinie entsprechend dem entsprechenden Wert von $\Delta\theta$ – der Phasendifferenz zwischen Wellen aus den zwei verschiedenen Quellen.
25. Wie würden sich – wenn überhaupt – die Knotenlinien und Linien maximaler konstruktiver Interferenz mit der Zeit verändern, wenn man von oben auf den Ripple-Tank herunter schaut? Begründe.
26. Schaue nun den Film-Clip „*2-source interference in a ripple tank*“ an und identifiziere die Knotenlinien und die Linien der maximalen konstruktiven Interferenz.

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

- 2-source interference in a ripple tank.
- Diffraction in real life.
- Gebeugtes Licht erzeugt ein Beugungsmuster von hellen und dunklen Peaks
- Berechne die Wellenlänge mit Youngs Doppelspalt-Formel
- Monochromatisches Licht plus Beugungsgitter erzeugt echt scharfe Peaks

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt *gemeinsam*!

Wir verwenden Beugung, um kohärente Quellen zu simulieren

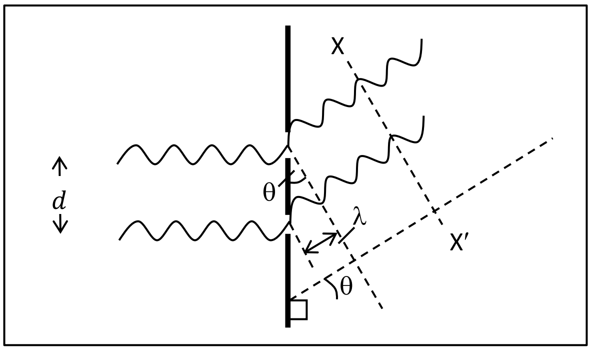
- In der Praxis ist es fast unmöglich, kohärente Wellen aus zwei verschiedenen Quellen zu erhalten. Stattdessen verwenden wir einen Trick der **Beugung**: das Biegen von Wellen um ein Hindernis.
- Wenn Wellen an einem Hindernis vorbeilaufen, werden sie ***gebeugt***, das heißt, sie biegen sich um die Kante des Hindernisses. Wenn sie also durch eine schmale Öffnung gehen, biegen sie sich von beiden Seiten der Öffnung nach außen und bilden sich ausbreitende, kreisförmige Wellen.

27. Schaue Dir nun den Film-Clip „*Diffraction in real life*“ an und identifiziere die Ausbreitung gebeugter Wellen, nachdem sie durch eine enge Öffnung gegangen sind.
28. Im Filmausschnitt sehen wir zwei verschiedene Öffnungen, durch die Wellen gebeugt werden. Wie hängt das Verhalten der gebeugten Welle von der Größe der Öffnung ab, durch die sie gehen?

- Von nun an betrachten wir nur noch den Fall von Wellen, die durch zwei sehr enge Schlitze gehen …

Die üblichste Art, Interferenzmuster zu sehen, ist die Verwendung von Youngs Doppelspaltexperiment im Labor. Die Bedingung für *konstruktive* Interferenz von zwei oder mehr parallelen Schlitzen oder Gitterlinien ergibt sich aus ***Youngs Zweispaltgleichung***:

$$d \sin \theta_n = n \lambda$$



wobei $n = 0,1,2,\ldots$ die Ordnung des konstruktiven Maximums im Beugungsbild bezeichnet, λ die Wellenlänge des durch die Schlitze tretenden Lichts, d der Abstand zwischen den Schlitzen und θ_n die Winkel der Beugungsmaxima bezüglich der Normalen zu der die Schlitze enthaltenden Barriere. Diese Gleichung ist nur gültig, wenn das einfallende Licht senkrecht zur Barriere steht. Beachte, dass für jede gegebene Ordnung n der Winkel θ_n zunimmt, wenn entweder der Spaltabstand d verringert oder die Wellenlänge λ erhöht wird.

29. Verwende das obige Diagramm von Youngs Experiment, um seine Zweispaltgleichung herzuleiten.

Dünne Filmschichten erzeugen Interferenzeffekte ohne Schlitze

Wir haben zuvor gesehen, dass Wellen, die an eine beliebige Grenze kommen, an der ihr Tempo *abnimmt*, bei der Reflexion invertiert werden. An einer Grenze, an der das Tempo *zunimmt*, wird die reflektierte Welle *nicht* invertiert. Die invertierten Lichtwellen, die von der *Vorder*seite einer dünnen Filmschicht reflektierten werden, können mit den Wellen interferieren, die von der *Rück*seite der Schicht reflektierten werden. Aus diesem Effekt entstehen die schönen, bunten Farben von Seifenblasen, Ölfilmen und Libellen. Der Effekt wird auch verwendet, um Reflexionen von Brillenlinsen zu minimieren.

Interferenzmuster werden schärfer, wenn wir mehr Spalten benützen

Ein ***Beugungsgitter*** ist eine Reihe von nicht nur einem Spalt, sondern vielen Spalten, die alle den gleichen Abstand d haben. In diesem Fall beschreiben wir das Gitter mit einer Gitterkonstante von $\frac{1}{d}\ \mathrm{Linien\ m^{-1}}$. Der Vorteil der Verwendung von mehr als zwei Spalten besteht darin, dass die Spitzen des Beugungsmusters dadurch viel deutlicher werden.

Ein wichtiger Fall in der Biologie, in dem Beugungspeaks verwendet wurden, war die Arbeit von Rosalind Franklin in den frühen 1950er Jahren bei der Entdeckung der chemischen Struktur der DNA. Franklin nutzte die sich periodisch wiederholende Basenstruktur in der DNA als natürliches Beugungsgitter.

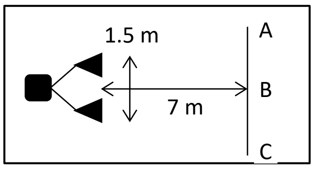
Fuß fassen

30. Was ist Beugung oder Diffraktion? Welche Aspekte des Lichts werden durch Youngs Experiment veranschaulicht?
31. Skizziere die Geschehnisse, wenn ebene Wellen auf einen Gegenstand treffen, der ungefähr die Breite einer Wellenlänge hat.
32. Wissenschaftler haben früher argumentiert, Licht könne keine Welle sein, weil sie keine Beugung beobachten konnten. Warum nicht?
33. Lassen sich alle Wellen beugen?
34. Wieso bekommt man bei Youngs Versuch einen hellen Peak an einem Punkt gleich weit von beiden Schlitzen?
35. Welchen Unterschied macht ein feineres Beugungsgitter?

36. (a) Welche Gleichung beschreibt den Winkel zwischen dem Peak *n*-ter Ordnung und dem Einfallswinkel von Licht auf ein Beugungsgitter? (b) Leite diese Gleichung her.

Muskeltraining

37. Ein Berg steht direkt zwischen Dir und einem Radiosender. Erkläre, wieso Dein Langwellenempfang viel besser als der Kurzwellenempfang ist.
38. Um in der Praxis Interferenz zu beobachten, müssen die Quellen aus zwei Schlitze vor einer Laserquelle bestehen. Warum?
39. Bei einem Versuch über Schallinterferenz werden zwei Lautsprecher mit einem Tongenerator mit Frequenz 1320 Hz verbunden (siehe rechts). Diese stehen 1.5 m auseinander und 7 m von der Wand AC entfernt. Eine Versuchsperson hört minimale Lautstärke bei A und C, und ein Maximum bei B. (a) Berechne die Wellenlänge der Schallwellen (Schallgeschwindigkeit in Luft ist $330\ \mathrm{ms}^{-1}$). (b) Was ist der Abstand $\overline{\mathrm{AC}}$?



40. Gelbes Laserlicht ($\lambda = 600\ \mathrm{nm}$) fällt auf ein Beugungsgitter mit Gitterkonstante $4 \times 10^5\ \mathrm{m}^{-1}$. (a) Bei welchem Winkel sind die Linien erster und zweiter Ordnung? (b) Gibt es eine Linie fünfter Ordnung?
41. Sichtbares, monochromatisches Licht fällt durch ein Gitter mit Konstante $3.7 \times 10^5\ \mathrm{m}^{-1}$. Das Maximum erster Ordnung steht im Winkel $14.2°$ zum einfallenden Strahl. Was ist die Wellenlänge des Lichts?
42. Der *Serica*-Käfer hat auf seinem Rücken eine Reihe eng beieinander liegender Rillen. Wenn ein dünner weißer Lichtstrahl normal auf den Rücken des Käfers gestrahlt wird, sehen wir blaues Licht aus mehreren Winkeln gegenüber der Normalen. Zwei Winkel, unter denen blaues Licht gesehen wird, sind 41,81° und 90° – diese beiden Maxima liegen nebeneinander. (a) Welchen Beugungsordnungen entsprechen diese beiden Winkel? (b) In welchem Winkel oder unter welchen Winkeln sehen wir rotes Licht? (Die Wellenlänge von blauem Licht beträgt 400 nm; die Wellenlänge von rotem Licht beträgt 700 nm.)

Numerische Ergebnisse

???

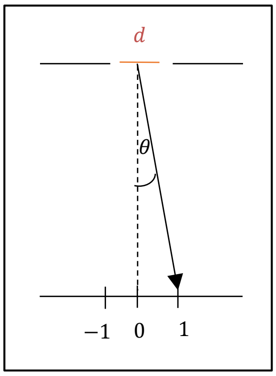
Konstruktionsübung: *Prüfungsvorbereitung*!

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Sichtbares, monochromatisches Licht fällt senkrecht durch ein Diffraktionsgitter mit Gitterkonstante $k = 3.7 \times 10^5\ \mathrm{m}^{-1}$. Das Interferenzmaximum erster Ordnung steht im Winkel $14.2°$ zur Normalen. Welche Wellenlänge hat das Licht?

Musterlösung:

Verfolgen



Die Gitterkonstante ist $k = 3.7 \times 10^5$ Gitterlinien/m. Die Linie erster Ordnung ($n = 1$) steht im Winkel $\theta = 14.2°$ zur Normalen. Wir wollen herausfinden, welche Wellenlänge λ dieses Licht hat.

Teilnehmen

Wenn monochromatisches Licht durch ein Difraktionsgitter fällt, wird das wellenartige Licht abgelenkt. Es entstehen neue Wellen, die durch Überlagerung Inteferenzerscheinungen zeigen. Die Interferenzerscheinungen sind entlang der Normalen am stärksten (vgl. Diagramm). Die Wellen überlagern sich ebenfalls entlang des Winkels θ zur Normalen. Um die Wellenlänge λ zu ermitteln, setzen wir die Gitterkonstante k und den Winkel θ in Youngs Doppelspalt-Formel ein: $n\,\lambda = d\sin(\theta)$. Der Gitterlinienabstand ist $d = 1/k$.

Abstrahieren

Setze in Youngs Doppelspalt-Formel ein und berechne λ.

Anwenden

Wir setzen $n = 1$, $\theta = 14.2°$ und $d = \frac{1}{k} = \frac{1}{3.7\times10^5\ \mathrm{m}^{-1}}$ in Youngs Doppelspalt-Formel ein:

$$
\begin{aligned}
& n\,\lambda = d\sin(\theta) \\
\Longrightarrow\quad & n\,\lambda = \frac{1}{k}\sin(\theta) \\
\Longrightarrow\quad & \lambda = \frac{1}{3.7\times10^5\ \mathrm{m}^{-1}}\sin(14.2°) \\
\Longrightarrow\quad & \lambda = 663 \times 10^{-9}\ \mathrm{m} = \underline{663\ \mathrm{nm}}
\end{aligned}
$$

Ergebnis verfolgen

Unser Ergebnis liegt im Bereich des sichtbaren Lichts (Wellenlängen zwischen ca. $380\ \mathrm{nm} - 780\ \mathrm{nm}$), was dieses Ergebnis belegt.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Gelbes Laserlicht ($\lambda = 600\ \mathrm{nm}$) fällt auf ein Beugungsgitter mit Gitterkonstante $4 \times 10^5\ \mathrm{m}^{-1}$. (a) Bei welchem Winkel sind die Linien erster und zweiter Ordnung? (b) Gibt es eine Linie fünfter Ordnung?