

# Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

## Module 01: Mathematical-physical methods

### Thema 31: Wie machen wir Geometrie rechenbar?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du ...

- Projektions- und Vektorprodukte anwenden, um Vektorkomponenten, Winkel zwischen Vektoren und Ebenengleichungen zu berechnen;
- Erklären, wie man eine strenge mathematische Struktur erstellt;
- Die Nützlichkeit von Spaced-Learning erkennen.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

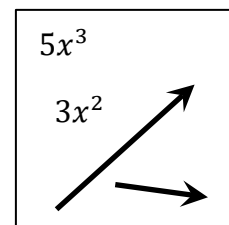
#### *Spaced-Learning*

In diesem Kapitel verwenden wir **Spaced-Learning**: Lernen mit absichtlichen Pausen. Versuche aus der Bildungsforschung belegen, dass solche Pausen die Effizienz unseres Lernens enorm steigern können. Lernen im Gehirn erfolgt durch die Bildung von Synapsen zwischen Neuronen. Diese Bildung wird vom Hippocampus veranlasst, der allgemein für Neugier zuständig ist, und der Hippocampus kann seine Arbeit besser erledigen, wenn wir ihn mit kreativen Aufgaben belustigen und ihm Pausen gönnen.

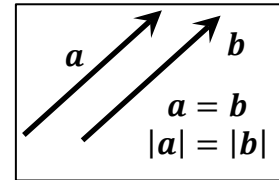
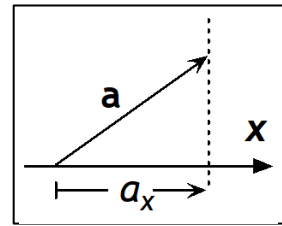
1. Lies den folgenden Dekonstruktions-Abschnitt komplett, ohne großartig darauf zu achten, ob Du alles genau verstanden hast. *Lege dann sofort dieses Skript weg und mache fünf Minuten lang irgendetwas Lustig-Kreatives – wie z.B. Sport, Zeichnen/Malen oder zur Musik Singen.* Den Rest machen wir beim Treffen!

#### *Vektoren sind mehr als nur Pfeile*

2. Stimmt es, dass  $3 + 2 = 5$ ?
  3. Von Westham fahre ich 3 Kilometer ostwärts, um in Eastham anzukommen. Von Eastham fahre ich dann 2 Kilometer nordwärts nach Northam. Ist die Entfernung von Westham nach Northam 5 Kilometer?
- Eine **Verschiebung** ist eine Bewegung von einer Position zu einer anderen. Wenn wir mit Verschiebungen rechnen, müssen wir sowohl ihren *Betrag* als auch ihre *Richtung* berücksichtigen.
  - Ein **Vektor** ist eine Größe mit **Betrag** und **Richtung** (siehe rechts).
  - Wir stellen den Vektor manchmal als Pfeil dar, oder manchmal in der Form  $\langle \text{Koeffizient} \rangle \times \langle \text{Potenz} \rangle$  (siehe rechts).
  - Ein **Skalar** ist eine Größe, die einen Wert (einschließlich Vorzeichen  $\pm$ ), aber *keine* Richtung hat. Bsp.: *Kraft* ist ein Vektor und *Temperatur* ist ein Skalar.
  - Wir können Vektorvariablen entweder fett ( $\mathbf{a}$ ), mit Unterstrich ( $\underline{a}$ ) oder mit einem Pfeil darüber schreiben ( $\vec{a}$ ).  $\overrightarrow{AB}$  ist ein **Verschiebungsvektor** vom Punkt  $A$  zum Punkt  $B$ .

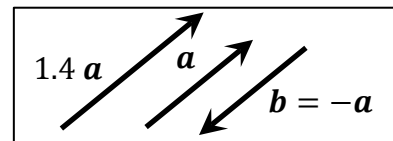


- Wir können einen Vektor als die Zusammensetzung mehrerer **Komponenten** konstruieren, z.B. dies ist ein Vektor:  $\mathbf{F} = (2 \ 5 \ -1 \ 3) \text{ N}$ .
- Jede Komponente  $a_i$  eines Vektors  $\mathbf{a}$  ist die **Projektion** des Vektors  $\mathbf{a}$  auf die Achsenrichtung  $\hat{x}_i$ .  $a_x$  ist zum Beispiel die Projektion von  $\mathbf{a}$  auf die Richtung der  $x$ -Achse (siehe rechts).
- Der **Betrag** eines Vektors ist die Länge seines Pfeils, oder auch der (positive) Koeffizient, der mit seiner Einheit multipliziert wird. Den Betrag des Vektors  $\mathbf{a}$  schreiben wir entweder als  $|\mathbf{a}|$  oder als  $a$ .
- Zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  sind genau dann gleich, wenn sie den gleichen Betrag *und* die gleiche Richtung haben (siehe rechts).

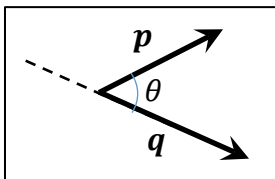


### Ein Vektor ist alles, was wir linear kombinieren können

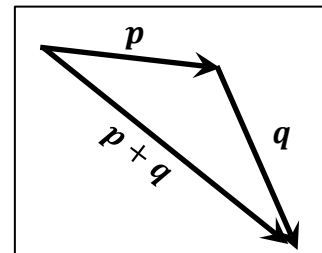
- Wenn zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  den gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Richtung haben, schreiben wir:  $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$  (siehe unten rechts).
- Wenn  $\lambda$  eine positive reelle Zahl ist, dann ist  $\lambda\mathbf{a}$  ein Vektor in die gleiche Richtung wie  $\mathbf{a}$ , aber mit dem Betrag  $\lambda|\mathbf{a}|$ .
- Um die **Summe** zweier Vektoren  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{q}$  zu bilden, legen wir sie Kopf an Fuß zusammen und zeichnen dann einen Vektor vom offenen Fuß zum offenen Kopf (siehe rechts).



- Der **Winkel** zwischen zwei Vektoren ist der Winkel zwischen ihren Richtungen, wenn beide Vektoren nach außen strahlen (siehe links).



- Um eine **lineare Kombination** der zwei Vektoren  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$  zu bilden, multiplizieren wir die Vektoren mit

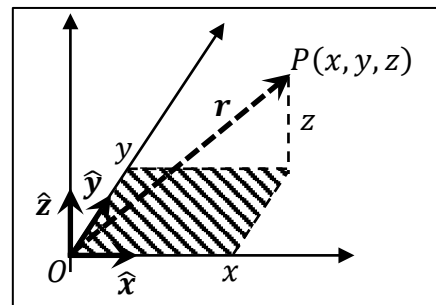


Koeffizienten und addieren dann das Ergebnis, zum Beispiel ist  $\mathbf{s} = 2\mathbf{p} - 3\mathbf{q}$  eine Linearkombination der Vektoren  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$ .

- *Im Allgemeinen ist ein Vektor in der Mathematik alles, was wir überhaupt, irgendwie linear kombinieren können!*

### Verwende Komponenten um Vektoren darzustellen

- Normalerweise sind Vektoren **frei**: Sie sind nicht an einer bestimmten Position fixiert. Die große Ausnahme sind **Ortsvektoren**, die ortsgebunden sind: Ihr Fuß steht immer auf einem festen **Ursprungspunkt**  $O$  (siehe rechts), den wir selber (nicht die Natur!) bestimmen. Z.B. ist rechts  $\mathbf{r}$  der Ortsvektor  $\overrightarrow{OP}$  des Punktes  $P$ . ( $\mathbf{r}$  steht hier für „radius“)
- Nach dem Ursprungspunkt  $O$  können wir auch drei senkrecht aufeinander stehende Achsenrichtungen wählen. Anhand dieser Achsen können wir jeden anderen Punkt  $P$  über die **Koordinaten**  $x$ ,  $y$  and  $z$  bezüglich dieser Achsen beschreiben.
- Jede Achsrichtung wird durch einen **Basisvektor**  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  oder  $\hat{z}$  bestimmt.
- Diese Basisvektoren sind auch **Einheitsvektoren**, das heißt, sie haben den Betrag 1.



- Wenn  $P$  in  $x$ -Richtung 4 Einheiten, in  $y$ -Richtung 3 Einheiten und in  $z$ -Richtung 2 Einheiten von  $O$  entfernt liegt, schreiben wir:  $\overrightarrow{OP} = 4\hat{x} + 3\hat{y} + 2\hat{z}$ . Oder:  $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
- Im Allgemeinen, wenn  $P(x, y, z)$  ein Punkt ist und  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$  sein Ortsvektor ist, schreiben wir  $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ , oder:  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .
- Um Vektoren in Komponentenform zu addieren, behandeln wir die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Komponenten getrennt voneinander und addiere sie einzeln. Wenn also  $\mathbf{u} = 3\hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z}$  und  $\mathbf{v} = \hat{x} + 2\hat{y} - 3\hat{z}$ , dann ist ihre Summe:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (3\hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z}) + (\hat{x} + 2\hat{y} - 3\hat{z}) \\ &= (3 + 1)\hat{x} + (2 + 2)\hat{y} + (2 - 3)\hat{z} \\ &= 4\hat{x} + 4\hat{y} - \hat{z} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{u} - \mathbf{v} &= (3 - 1)\hat{x} + (2 - 2)\hat{y} + (2 - (-3))\hat{z} \\ &= 2\hat{x} + 5\hat{z} \end{aligned}$$

- Wir können den Betrag des Vektors  $\mathbf{v} = 12\hat{x} - 3\hat{y} + 4\hat{z}$  mit dem Satz von Pythagoras in drei Dimensionen berechnen:

$$v = |12\hat{x} - 3\hat{y} + 4\hat{z}| = \sqrt{12^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{169} = 13$$

- Um einen Einheitsvektor in Richtung von  $\mathbf{v}$  zu finden, dividieren wir  $\mathbf{v}$  durch seinen eigenen Betrag  $|\mathbf{v}|$ :

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{12\hat{x} - 3\hat{y} + 4\hat{z}}{13} = \frac{1}{13}(12\hat{x} - 3\hat{y} + 4\hat{z})$$

- Zwei Vektoren sind sich genau dann **gleich**, wenn ihre Komponenten sich gleich sind. Wenn also  $\mathbf{a} = x\hat{x} + 3\hat{y}$  und  $\mathbf{b} = 5\hat{x} - y\hat{y}$ , dann gilt  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  genau wenn  $x = 5$  und  $y = -3$ .
- $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  sind **parallel** genau dann, wenn  $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$ . Also ist  $(12\hat{x} - 6\hat{y} + 4\hat{z}) \parallel (6\hat{x} - 3\hat{y} + 2\hat{z})$ , da  $(12\hat{x} - 6\hat{y} + 4\hat{z}) = 2 \cdot (6\hat{x} - 3\hat{y} + 2\hat{z})$ .

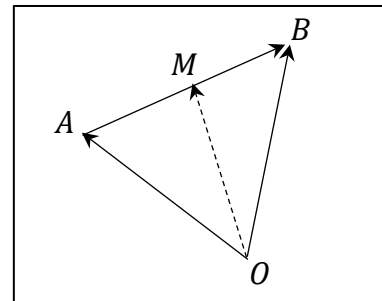
### Verwende Vektor-Algebra um geometrische Probleme zu lösen

- Um den **Verschiebungsvektor** von Punkt  $A(x_1, y_1, z_1)$  zu Punkt  $B(x_2, y_2, z_2)$  zu finden:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= x_1\hat{x} + y_1\hat{y} + z_1\hat{z} \\ \overrightarrow{OB} &= x_2\hat{x} + y_2\hat{y} + z_2\hat{z} \\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= (x_2 - x_1)\hat{x} + (y_2 - y_1)\hat{y} + (z_2 - z_1)\hat{z} \end{aligned}$$

- Um den **Mittelpunkt**  $M$  der zwei Punkte  $A(x_1, y_1, z_1)$  und  $B(x_2, y_2, z_2)$  zu finden:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\hat{x} + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\hat{y} + \frac{1}{2}(z_1 + z_2)\hat{z} \end{aligned}$$



## Verwende das Skalarprodukt, um Projektions-Aufgaben zu lösen

- Das **Skalarprodukt**  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  ist eine Methode zur Multiplikation zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ , die jeden Vektor auf den jeweilig anderen projiziert, um ein skalares Ergebnis zu erhalten. Das Skalarprodukt wird so definiert:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta_{ab})$$

- Das Skalarprodukt ist kommutativ, also:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ .
- Wenn  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  *parallel* sind, dann gilt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv ab \cos(0) = ab$ .
- Wenn  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  *anti-parallel* sind, gilt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv ab \cos(\pi) = -ab$ .
- Wenn  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  *senkrecht* stehen, gilt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv ab \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .
- Wenn  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  sich *gleich* sind, gilt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \equiv a^2 \cos(0) = |\mathbf{a}|^2$ .
- Insbesondere,  $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1$ .
- Außerdem,  $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0$ .
- Daraus folgt, dass:

$$(a_x \hat{\mathbf{x}} + a_y \hat{\mathbf{y}} + a_z \hat{\mathbf{z}}) \cdot (b_x \hat{\mathbf{x}} + b_y \hat{\mathbf{y}} + b_z \hat{\mathbf{z}}) = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)$$

Zum Beispiel:  $(2\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 4\hat{\mathbf{z}}) \cdot (\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} - 2\hat{\mathbf{z}}) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) = 3$

- Stehen die zwei Vektoren  $\mathbf{a} = (2\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 4\hat{\mathbf{z}})$  and  $\mathbf{b} = (\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} - 2\hat{\mathbf{z}})$  senkrecht aufeinander? Da ihr Skalarprodukt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3$  ungleich null ist, stehen sie *nicht* senkrecht aufeinander!
- Was ist die Projektion  $b_a$  des Vektors  $\mathbf{b}$  auf den Vektor  $\mathbf{a}$ ? Wir wissen, dass  $b_a = b \cos(\theta_{ab})$ . Aber  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos(\theta_{ab})$ , also gilt:

$$b_a = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{a} = \frac{(2\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 4\hat{\mathbf{z}}) \cdot (\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} - 2\hat{\mathbf{z}})}{\sqrt{4 + 9 + 16}} = \frac{3}{\sqrt{29}} \approx 0.557$$

- Was ist der Winkel  $\theta_{ab}$  zwischen  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ ? Wir wissen, dass  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos(\theta_{ab})$ , also:

$$\cos(\theta_{ab}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab} = \frac{3}{\sqrt{29} \times \sqrt{14}} \approx 0.149 \Rightarrow \theta_{ab} \approx 1.42 \text{ rad}$$

- Was ist die Gleichung derjenigen Ebene senkrecht zum Vektor  $\mathbf{a}$ , die den Punkt  $P(1,1,0)$  enthält? Wenn  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$  ein beliebiger allgemeiner Punkt in dieser Ebene ist, muss der Vektor von  $P$  zu diesem allgemeinen Punkt senkrecht zu  $\mathbf{a}$  stehen, also:

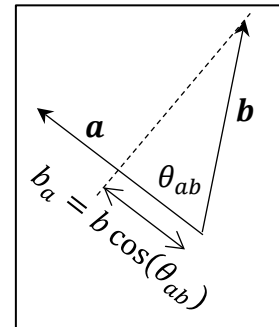
$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} - \overrightarrow{OP}) &= 0 \\ (2\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 4\hat{\mathbf{z}}) \cdot ((x-1)\hat{\mathbf{x}} + (y-1)\hat{\mathbf{y}} + (z-0)\hat{\mathbf{z}}) &= 0 \\ 2(x-1) + 3(y-1) + 4z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 5 \end{aligned}$$

## Das Kreuzprodukt berechnet die Normale zu zwei anderen Vektoren

- Das **Kreuzprodukt**  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  ist eine weitere Methode zur Multiplikation zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ , die die von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannten Vektorfläche zurückgibt. Das Kreuzprodukt wird so definiert:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\theta_{ab}) \hat{\mathbf{e}}_{ab}$$

- Wir berechnen  $\hat{\mathbf{e}}_{ab}$  über die **Rechte-Hand-Regel**. Dieser Vektor steht immer normal zu  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ .

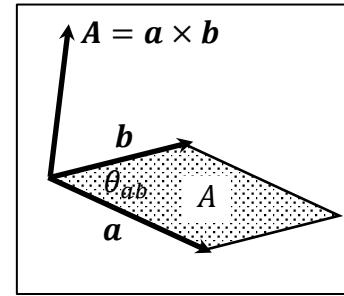


- Das Kreuzprodukt ist **anti-kommutativ**:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ .
- Wenn  $(\mathbf{a} \parallel \mathbf{b})$ :  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv ab \sin(0) \hat{\mathbf{e}}_{ab} = \mathbf{0}$ .
- Wenn  $(\mathbf{a} \perp \mathbf{b})$ :  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv ab \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \hat{\mathbf{e}}_{ab} = ab \hat{\mathbf{e}}_{ab}$ .
- Insbesondere,  $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$ .
- Außerdem:  $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$ ;  $\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}$ ;  $\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}$ .
- Daraus folgt, dass:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Zum Beispiel:  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) - 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Dieser Vektor steht **normal** (senkrecht) zu beiden Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ .



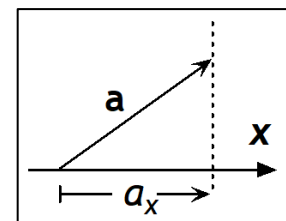
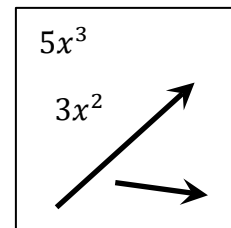
## Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

- [Skalare haben nur einen Betrag; Vektoren haben auch noch eine Richtung](#)
- [Vektoren existieren in einem n-dimensionalen Koordinatenraum](#)
- [Wir können ein Diagramm benutzen um Vektoren zu addieren](#)
- [Wir können einen Vektor mit einem Skalar multiplizieren](#)
- [Wir können beliebige Vektoren über Einheitsvektoren darstellen](#)
- [Verstehen tun wir am besten anhand von vielen Beispielen](#)

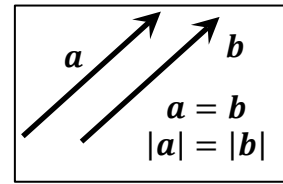
## Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt gemeinsam!

### Vektoren sind mehr als nur Pfeile

- Eine \_\_\_\_\_ ist eine Bewegung von einer Position zu einer anderen. Wenn wir mit \_\_\_\_\_ rechnen, müssen wir sowohl ihren *Betrag* als auch ihre \_\_\_\_\_ berücksichtigen.
- Ein **Vektor** ist eine Größe mit \_\_\_\_\_ und \_\_\_\_\_ (siehe rechts).
- Wir stellen den Vektor manchmal als Pfeil dar, oder manchmal in der Form  $\langle \text{_____} \rangle \times \langle \text{Potenz} \rangle$  (siehe rechts).
- Ein \_\_\_\_\_ ist eine Größe, die einen Wert (einschließlich Vorzeichen  $\pm$ ), aber *keine* Richtung hat. Bsp.: *Kraft* ist ein \_\_\_\_\_ und *Temperatur* ist ein \_\_\_\_\_.
- Wir können Vektorvariablen entweder \_\_\_\_\_ ( $\mathbf{a}$ ), mit \_\_\_\_\_ ( $\underline{a}$ ) oder mit einem Pfeil darüber schreiben ( $\vec{a}$ ).  $\vec{AB}$  ist ein **Verschiebungsvektor** vom Punkt A zum Punkt B.
- Wir können einen Vektor als die Zusammensetzung mehrerer \_\_\_\_\_ konstruieren, z.B. dies ist ein Vektor:  $\mathbf{F} = (2 \ 5 \ -1 \ 3) \text{ N}$ .
- Jede Komponente  $a_i$  eines Vektors  $\mathbf{a}$  ist die \_\_\_\_\_ des Vektors  $\mathbf{a}$  auf die Achsenrichtung  $\hat{\mathbf{x}}_i$ .  $a_x$  ist zum Beispiel die \_\_\_\_\_ von  $\mathbf{a}$  auf die Richtung der x-Achse (siehe rechts).
- Der \_\_\_\_\_ eines Vektors ist die Länge seines Pfeils, oder auch der (positive) Koeffizient, der mit seiner Einheit multipliziert wird. Den Betrag des Vektors  $\mathbf{a}$  schreiben wir entweder als  $|\mathbf{a}|$  oder als \_\_\_\_\_.



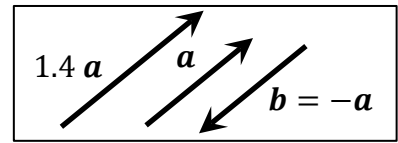
- Zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  sind genau dann \_\_\_\_\_, wenn sie den gleichen Betrag *und* die gleiche Richtung haben (siehe rechts).



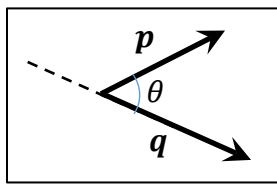
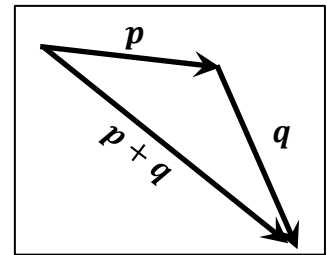
### Ein Vektor ist alles, was wir \_\_\_\_\_ kombinieren können

- Wenn zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  den gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Richtung haben, schreiben wir:  $\mathbf{b} = \underline{\hspace{2cm}}$  (siehe unten rechts).

- Wenn  $\lambda$  eine positive reelle Zahl ist, dann ist  $\lambda\mathbf{a}$  ein Vektor in die gleiche Richtung wie  $\mathbf{a}$ , aber mit dem Betrag \_\_\_\_\_.



- Um die **Summe** zweier Vektoren  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{q}$  zu bilden, legen wir sie \_\_\_\_\_ zusammen und zeichnen dann einen Vektor vom offenen Fuß zum offenen Kopf (siehe rechts).



- Der **Winkel** zwischen zwei Vektoren ist der Winkel zwischen ihren Richtungen, wenn beide Vektoren *nach außen* \_\_\_\_\_ (siehe links).

- Um eine \_\_\_\_\_ der zwei Vektoren  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$  zu bilden, multiplizieren wir die Vektoren mit

Koeffizienten und addieren dann das Ergebnis, zum Beispiel ist  $\mathbf{s} = 2\mathbf{p} - 3\mathbf{q}$  eine \_\_\_\_\_ der Vektoren  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$ .

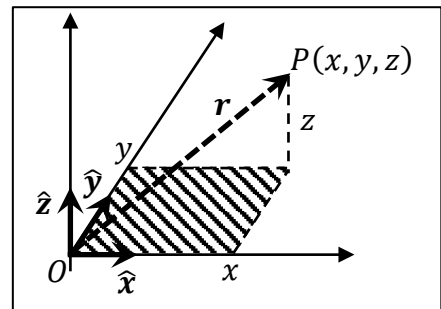
- *Im Allgemeinen ist ein Vektor in der Mathematik alles, was wir überhaupt, irgendwie \_\_\_\_\_ können!*

### Verwende Komponenten um Vektoren darzustellen

- Normalerweise sind Vektoren **frei**: Sie sind nicht an einer bestimmten Position fixiert. Die große Ausnahme sind \_\_\_\_\_, die ortsgebunden sind: Ihr Fuß steht immer auf einem festen \_\_\_\_\_  $O$  (siehe rechts),

den wir selber (nicht die Natur!) bestimmen. Z.B. ist rechts  $\mathbf{r}$  der Ortsvektor  $\overrightarrow{OP}$  des Punktes  $P$ . ( $\mathbf{r}$  steht hier für „radius“)

- Nach dem Ursprungspunkt  $O$  können wir auch drei senkrecht aufeinander stehende Achsenrichtungen wählen. Anhand dieser Achsen können wir jeden anderen Punkt  $P$  über die \_\_\_\_\_  $x$ ,  $y$  and  $z$  bezüglich dieser Achsen beschreiben.



- Jede Achsrichtung wird durch einen \_\_\_\_\_  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  oder  $\hat{z}$  bestimmt.
- Diese Basisvektoren sind auch \_\_\_\_\_, das heißt, sie haben den Betrag 1.
- Wenn  $P$  in  $x$ -Richtung 4 Einheiten, in  $y$ -Richtung 3 Einheiten und in  $z$ -Richtung 2 Einheiten von  $O$  entfernt liegt, schreiben wir:  $\overrightarrow{OP} = 4\hat{x} + 3\hat{y} + 2\hat{z}$ . Oder:  $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{pmatrix}$ .

- Im Allgemeinen, wenn  $P(x, y, z)$  ein Punkt ist und  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$  sein Ortsvektor ist, schreiben wir  $\mathbf{r} = \underline{\hspace{2cm}}$ , oder:  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{pmatrix}$ .

- Um Vektoren in Komponentenform zu addieren, behandeln wir die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Komponenten getrennt voneinander und addiere sie einzeln. Wenn also  $\mathbf{u} = 3\hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z}$  und  $\mathbf{v} = \hat{x} + 2\hat{y} - 3\hat{z}$ , dann ist ihre Summe:



- Insbesondere,  $\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- Außerdem,  $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- Daraus folgt, dass:

$$(a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}) \cdot (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}) = (\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}})$$

Zum Beispiel:  $(2\hat{x} + 3\hat{y} + 4\hat{z}) \cdot (\hat{x} + 3\hat{y} - 2\hat{z}) = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} = 3$

- Stehen die zwei Vektoren  $\mathbf{a} = (2\hat{x} + 3\hat{y} + 4\hat{z})$  and  $\mathbf{b} = (\hat{x} + 3\hat{y} - 2\hat{z})$  senkrecht aufeinander? Da ihr Skalarprodukt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3$                       ist, stehen sie *nicht* senkrecht aufeinander!
- Was ist die Projektion  $b_a$  des Vektors  $\mathbf{b}$  auf den Vektor  $\mathbf{a}$ ? Wir wissen, dass  $b_a = b \cos(\theta_{ab})$ . Aber  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos(\theta_{ab})$ , also gilt:

$$b_a = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(2\hat{x} + 3\hat{y} + 4\hat{z}) \cdot (\hat{x} + 3\hat{y} - 2\hat{z})}{\sqrt{4 + 9 + 16}} = \frac{3}{\sqrt{29}} \approx 0.557$$

- Was ist der Winkel  $\theta_{ab}$  zwischen  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ ? Wir wissen, dass  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos(\theta_{ab})$ , also:

$$\cos(\theta_{ab}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{3}{\sqrt{29} \times \sqrt{14}} \approx 0.149 \Rightarrow \theta_{ab} \approx 1.42 \text{ rad}$$

- Was ist die Gleichung derjenigen Ebene senkrecht zum Vektor  $\mathbf{a}$ , die den Punkt  $P(1,1,0)$  enthält? Wenn  $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$  ein beliebiger allgemeiner Punkt in dieser Ebene ist, muss der Vektor von  $P$  zu diesem allgemeinen Punkt senkrecht zu  $\mathbf{a}$  stehen, also:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} - \overline{OP}) &= 0 \\ (2\hat{x} + 3\hat{y} + 4\hat{z}) \cdot (\underline{\hspace{1cm}} \hat{x} + \underline{\hspace{1cm}} \hat{y} + \underline{\hspace{1cm}} \hat{z}) &= 0 \\ 2(x-1) + 3(y-1) + 4z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 5 \end{aligned}$$

### Das Kreuzprodukt berechnet die Normale zu zwei anderen Vektoren

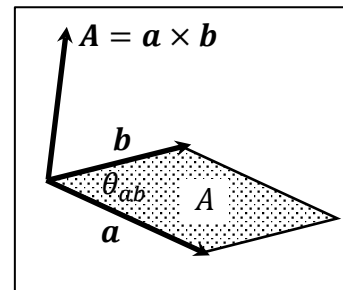
- Das **Kreuzprodukt**  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  ist eine weitere Methode zur Multiplikation zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ , die die von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannten                      zurückgibt. Das Kreuzprodukt wird so definiert:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \underline{\hspace{1cm}} \hat{\mathbf{e}}_{ab}$$

- Wir berechnen  $\hat{\mathbf{e}}_{ab}$  über die **Rechte-Hand-Regel**. Dieser Vektor steht immer                      zu  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ .
- Das Kreuzprodukt ist                     :  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ .
- Wenn  $(\mathbf{a} \parallel \mathbf{b})$ :  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv ab \sin(\underline{\hspace{1cm}}) \hat{\mathbf{e}}_{ab} = \mathbf{0}$ .
- Wenn  $(\mathbf{a} \perp \mathbf{b})$ :  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv ab \sin(\underline{\hspace{1cm}}) \hat{\mathbf{e}}_{ab} = ab \hat{\mathbf{e}}_{ab}$ .
- Insbesondere,  $\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- Außerdem:  $\hat{x} \times \hat{y} = \underline{\hspace{2cm}}$ ;                      =  $\hat{x}$ ;                      =  $\hat{y}$ .
- Daraus folgt, dass:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} \end{pmatrix}$$

Zum Beispiel:  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) - 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{pmatrix}$



- Dieser Vektor steht \_\_\_\_\_ (senkrecht) zu beiden Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ .

### Fuß fassen

4. Der Punkt  $P$  liegt 5 Einheiten von  $O$  in  $x$ -Richtung,  $-3$  in  $y$ -Richtung und  $7$  in  $z$ -Richtung entfernt. Beschreibe  $P$  sowohl in Bezug auf Basisvektoren als auch als Spaltenvektor.
5. Angenommen,  $\mathbf{u} = -3\hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z}$  und  $\mathbf{v} = -\hat{x} - 2\hat{y} - 3\hat{z}$ . Berechne  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  und  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ .
6. Was ist der Betrag des Vektors  $\mathbf{v} = 2\hat{x} - 4\hat{y} + 4\hat{z}$ ?
7. Welche dieser Vektoren, wenn überhaupt, sind parallel zum Vektor  $(5\hat{x} - 2\hat{y} + 4\hat{z})$ :  $(10\hat{x} - 4\hat{y} + 8\hat{z})$ ;  $(-5\hat{x} + 2\hat{y} - 4\hat{z})$ ;  $(4\hat{x} - 2\hat{y} + 5\hat{z})$ ?
8. Finde den Einheitsvektor  $\hat{\mathbf{v}}$ , der in Richtung des Vektors  $\mathbf{v} = \hat{x} + 8\hat{y} - 4\hat{z}$  zeigt.
9. Gegeben sind diese drei Punkte:  $A(3, -1, 5)$ ,  $B(7, 1, 3)$  und  $C(-5, 9, -1)$ .  $L$  ist der Mittelpunkt von  $\overline{AB}$  und  $M$  ist der Mittelpunkt von  $\overline{BC}$ . Wie lang ist die Strecke  $\overline{LM}$ ?
10. Zeige, dass der Vektor  $\mathbf{a} = \hat{x} + 7\hat{y} + 3\hat{z}$  senkrecht zu den zwei Vektoren  $\mathbf{b} = \hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z}$  und  $\mathbf{c} = 2\hat{x} + \hat{y} - 3\hat{z}$  liegt.
11. Finde den Winkel  $\theta$  zwischen diesen Vektoren:  $\mathbf{p} = 2\hat{x} + 4\hat{y} + \hat{z}$  und  $\mathbf{q} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$ .
12. Was ist die Projektion  $a_b$  des Vektors  $\mathbf{a} = 3\hat{x} + 4\hat{y} - 7\hat{z}$  auf die Richtung des zweiten Vektors  $\mathbf{b} = 3\hat{x} + 4\hat{y}$ ?
13. Erkläre den Unterschied zwischen einer Skalar- und einer Vektorgröße.
14. Lucy schwimmt mit  $0.18 \text{ ms}^{-1}$  rechtwinkelig zum Strom eines Flusses mit Stromgeschwindigkeit  $0.35 \text{ ms}^{-1}$ . Zeige, dass ihre resultierende Geschwindigkeit  $0.39 \text{ ms}^{-1}$  im Winkel  $27.2^\circ$  zum Strom ist.
15. Lucy zieht an ihrer Leine mit einer Kraft  $40 \text{ N}$  im Winkel  $26^\circ$  unter der Horizontalen. Zeige, dass die horizontale Komponente dieser Kraft ungefähr  $36 \text{ N}$  ist.
16. Berechne  $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$ , wobei  $\mathbf{a} = 3\hat{x} + 7\hat{y}$ ;  $\mathbf{b} = -2\hat{x} + 2\hat{y}$ ;  $\mathbf{c} = \hat{x} - 3\hat{y}$ .
17. Ein Flugzeug fliegt  $40 \text{ km}$  direkt nach Süden, dann  $60 \text{ km}$  nach Südosten und anschließend  $70 \text{ km}$  mit einer Kompasspeilung  $020^\circ$ . Berechne den Abstand und die Peilung, die das Flugzeug für die Heimfahrt braucht.

### Muskeltraining

18. Finde einen dritten Vektor  $\mathbf{a}$ , der senkrecht zu den zwei Vektoren  $\mathbf{b} = \hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z}$  und  $\mathbf{c} = 2\hat{x} + \hat{y} - 3\hat{z}$  steht.
19. Beweise, dass Deine Antwort  $\mathbf{a}$  auf die vorige Aufgabe tatsächlich senkrecht zu den zwei Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  steht.
20. Berechne einen Vektor  $\mathbf{d}$ , der senkrecht zu den zwei Vektoren  $\mathbf{b} = -\hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z}$  und  $\mathbf{c} = 2\hat{x} + \hat{y} - 3\hat{z}$  steht. Beweise, dass  $\mathbf{d}$  parallel zu Deinem Ergebnis  $\mathbf{a}$  aus den vorigen zwei Aufgaben ist.
21. Der Wind drückt mit einer Kraft  $20 \text{ N}$  auf einen herunterfallenden Felsen mit Gewicht  $75 \text{ N}$ . Was ist Betrag und Richtung der resultierenden Gesamtkraft auf den Stein?
22. Ein Segelflugzeug fliegt mit Geschwindigkeit  $20.0 \text{ ms}^{-1}$  im Winkel  $15^\circ$  unterhalb der Horizontalen. Berechne die horizontale und die vertikale Komponente seiner Geschwindigkeit.
23. Kristin kann in stillem Wasser mit  $2 \text{ ms}^{-1}$  schwimmen. Sie schwimmt jetzt senkrecht zum Ufer über einen Fluss, dessen Wasser mit  $3 \text{ ms}^{-1}$  fließt. Was ist der Betrag und der Winkel ihrer resultierenden Geschwindigkeit?
24. Ein Bakterium befindet sich zunächst am Punkt  $O$  mit Ortsvektor  $\mathbf{s}_0 = (\hat{x} + 2\hat{y}) \mu\text{m}$ . Es schwimmt  $8 \text{ s}$  lang mit konstanter Geschwindigkeit  $(3\hat{x} + \hat{y}) \mu\text{ms}^{-1}$  zum Punkt  $A$ . Ein zweites Bakterium hat konstante Geschwindigkeit  $(-4\hat{x} + 2\hat{y}) \mu\text{ms}^{-1}$  und braucht

5 s um von  $A$  nach  $B$  zu schwimmen. Finde die Ortsvektoren  $\mathbf{s}_A$  und  $\mathbf{s}_B$  der zwei Punkte  $A$  und  $B$ .

25. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet sich ein Samen am Ort  $(\hat{x} + 5\hat{y})$  m, wobei  $\hat{i}$  und  $\hat{y}$  jeweils die Einheitsvektoren in die Richtungen Ost und Nord sind. Der Samen bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit  $(7\hat{x} - 3\hat{y})$  ms<sup>-1</sup>. Nach 4 s ändert sich die Geschwindigkeit des Samens zu  $(a\hat{x} + b\hat{y})$  ms<sup>-1</sup>. Nach weiteren 3.5 s erreicht der Samen den Ort  $(15\hat{x})$  m. Berechne (a) den Geschwindigkeitsbetrag des Samens zum Zeitpunkt  $t = 0$ ; (b) die Kompasspeilung des Samens zum Zeitpunkt  $t = 0$ ; (c) den Wert von  $a$  und von  $b$ .
26. Ein Elektron bewegt sich in der Ebene einer Graphitschicht. Am Anfang befindet es sich beim Punkt  $P: (\hat{x} + \hat{y})$  μm relativ zu einem fixen Ursprungspunkt. Bei  $P$  hat das Elektron Geschwindigkeit  $(3\hat{x} - \hat{y})$  μms<sup>-1</sup>; es bewegt sich 10 s lang bei konstanter Beschleunigung, bis es den Punkt  $Q: (6\hat{x} + 11\hat{y})$  μm erreicht. Was ist die Beschleunigung des Elektrons? Zeige, dass sich das Elektron 6 s nach Verlassen des Punkts  $P$  parallel zum Einheitsvektor  $\hat{y}$  bewegt.

### Numerische Ergebnisse

- 16:  $[-4\hat{x} + 20\hat{y}]$
- 17: [68.4 km; 284°]
- 21: [77.6 N im Winkel 14.9° zur Vertikalen]
- 22: [19.3 m/s; 5.2 m/s]
- 23:  $[\sqrt{13}$  ms<sup>-1</sup>; 34° zum Ufer]
- 24:  $[(25\hat{x} + 10\hat{y})$  μm;  $(5\hat{x} + 20\hat{y})$  μm]
- 25: [7.62 ms<sup>-1</sup>; 113°; -4; 2]
- 26:  $[(-0.5\hat{x} + 0.4\hat{y})$  μms<sup>-2</sup>;  $\mathbf{v} = 1.4\hat{y}]$

### Konstruktionsübung: Prüfungsvorbereitung!

#### Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Ein eintreffender Fußball liefert eine Kraft von 100 N an eine Fensterscheibe im Winkel  $\frac{\pi}{6}$  zur Ebene der Scheibe. Wieviel Kraft übt der Fußball auf das Glas aus?

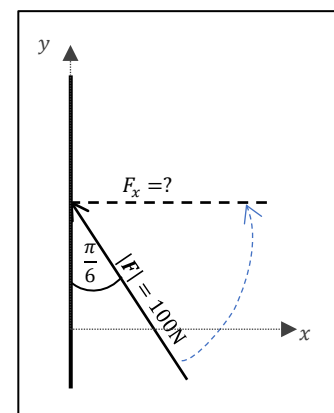
#### Musterlösung:

##### Verfolgen

Da die  $x, y$ -Achsen in der Natur nicht existieren, dürfen wir sie frei wählen. Als  $y$ -Achse wählen wir die Fensterscheibe und die  $x$ -Achse wählen wir im rechten Winkel dazu. Der Ursprung unseres Koordinatensystems ist der Punkt, an dem sich Fußball und Scheibe treffen. Die volle Kraft  $\mathbf{F} = 100$  N des Fußballs trifft die Fensterscheibe im Winkel  $\frac{\pi}{6}$  zur Scheibe.

##### Teilnehmen

Da der Fußball die Fensterscheibe in einem bestimmten Winkel trifft, ist nicht die gesamte Kraft des eintreffenden Balls auf das Glas gerichtet. Wir müssen also herausfinden, welcher Anteil der gesamten Kraft die Scheibe horizontal trifft. Dazu müssen wir den Vektor  $\mathbf{F}$  auf die  $x$ -Achse projizieren bzw. den Anteil von  $\mathbf{F}$  in die  $x$ -Richtung finden.



## Abstrahieren

Projiziere den Vektor  $\mathbf{F}$  auf die  $x$ -Achse indem du den Sinus des Winkels bildest und mit dem Betrag von  $\mathbf{F}$  multiplizierst.

## Anwenden

Der Betrag von  $\mathbf{F}$  ist 100 N. Deshalb multiplizieren wir die Kraft mit dem Sinus des Winkels  $\frac{\pi}{6}$  um die  $x$ -Komponente des Vektors zu erhalten:

$$F_x = |\mathbf{F}| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 100 \text{ N} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \underline{50 \text{ N}}$$

Die Kraft, die der Ball auf das Glas ausübt, beträgt also 50 N.

## Ergebnis verfolgen

Der ermittelte Wert der Kraft klingt plausibel, da 50 N weniger sind als die gesamte Kraft, die der Ball liefert. Das Gewicht, das die Scheibe horizontal trifft ist ca. 5 kg (*Annahme:  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$* ). Der Wert klingt realistisch, denn je nachdem wie ein Fußball eine Scheibe trifft, kann eine Fensterscheibe zerbrechen oder auch nicht.

## Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

**Achtung, Spoiler!** Diese Aufgabe ist Deine erste Begegnung mit Theory-Construction. Der IGOPI-Zyklus hilft nicht nur bei Aufgaben mit einer ‚richtigen‘ Antwort, sondern auch, beim Aufbauen einer Theorie für Situationen, wo es noch keine richtige Lösung gibt. Du weißt wahrscheinlich noch gar nichts über Strahlungs- (also Licht-) energie, und trotzdem verlangt die Aufgabe von Dir, dass Du eine Theorie des Lichts aufbaust, die der Grundaufforderung der Energieerhaltung folgt. Folge einfach dem bekannten Zyklus ...

Sonnenschein trifft auf die Flügel eines Schmetterlings im Winkel  $\frac{\pi}{6}$  zur Ebene der Flügel. Wieviel Prozent der Sonnenenergie kommt dem Schmetterling zugute? (*Vorsicht: Die Summe des gewonnenen und des verlorenen Anteils der Energie muss gleich 100% sein!*)