Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 33: Wie akkumuliert sich Veränderung über Zeit?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

- Akkumulation anwenden um neue Theorien von Populationswachstum zu entwickeln und um Galileos Gleichungen herzuleiten;
- Den Konstruktionszyklus anwenden, um Theorien zu generieren.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

*Theorien entstehen meistens aus **Daten***

Stelle Dir vor, Du befindest Dich in einem Labor mit einer Uhr und einer Petrischale mit Agar (Nahrung). Zu einem bestimmten Zeitpunkt stellst Du Deine Uhr auf die Zeit $t = 0\mathrm{h}$ zurück und legst gleichzeitig $x_0 = 1$ Hefezellen in die Schale. Nach einer Stunde zeigt die Uhr die Zeit $t = 1\mathrm{h}$ an und Du zählst 2 Zellen in der Schale; nach einer Zeit $t = 2\mathrm{h}$ findest Du 4 Zellen; und nach der Zeit $t = 3\mathrm{h}$ gibt es 8 Zellen. Diese Zeitreihe umfasst Deine beobachteten Datenereignisse; wie könnten wir sie interpretieren?

*Zunächst **erkennen** wir eine Struktur in diesen Daten*

Es scheint, dass sich die Anzahl der Hefezellen in der Schale jede Stunde verdoppelt; wir sagen, dass die ***Verdopplungsperiode*** (T_2) der Hefezellen 1 Stunde beträgt: $T_2 = 1\mathrm{h}$. Wir können die *Struktur* unserer Daten durch eine Funktion $x(t)$ mit Argument $x(t)$ beschreiben, die die Anzahl der Zellen x zum Zeitpunkt t angibt:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 = 2^0 \cdot x_0 = 1 \\ x(T_2) = 2 \cdot x_0 = 2^1 \cdot x_0 = 2 \\ x(2T_2) = 2 \cdot 2 \cdot x_0 = 2^2 \cdot x_0 = 4 \\ x(3T_2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x_0 = 2^3 \cdot x_0 = 8 \end{cases}$$

1. Wie viele Hefezellen sind nach 5 Stunden in der Petrischale?
2. Wie viele Hefezellen sind nach 10 Stunden in der Petrischale?

*Wir **verallgemeinern** diese Struktur zu einem relationalen Modell*

Diese Verdoppelung der Anzahl der Hefezellen nach jeder Stunde des Experiments ist eine mathematische *Relation* zwischen den Anzahlen der Zellen in der Petrischale zu verschiedenen Zeitpunkten, t:

$$x(nT_2) = 2 \cdot x\big((n-1)T_2\big) = 2^2 \cdot x\big((n-2)T_2\big) = \cdots = 2^n \cdot x_0$$

Oder alternativ:

$$x(t) \equiv x_0 \cdot 2^{t/T_2} \qquad \textbf{(Verdoppelungs-Modell)}$$

Diese *Relation* $x(t) \equiv x_0 \cdot 2^{t/T_2}$ ist ein ***Modell*** unserer Beobachtungen der Hefezellen in der Petrischale: Sie sagt uns, wie Struktur und Operationen verknüpft sind, um unsere

Beobachtungsdaten zu beschreiben. In jedem Moment unseres Lebens verwenden wir Modelle, um unsere Erfahrungen zu beschreiben, und diese Modelle verbinden immer Strukturen und Relationen:

Modelle beschreiben das Sein unserer Welt: Wie hängt ein Datenereignis von anderen ab?

Wir nennen unser Verdopplungsmodell der Hefezellen ein ***Exponentialmodell***, weil sein Argument t als Exponent der Basis 2 (also $2^{t/T_2}$) in unserer Definition des Modells erscheint. Der beste Weg, ein Modell zu testen, besteht darin, von ihm zu verlangen, neue Daten vorherzusagen, die wir testen können …

Wir wenden das neue Modell an

Wenn wir eine neue Zeit $t = 8\mathrm{h}$ in unser Verdopplungsmodell einfügen, finden wir, dass

$$x(t) = x(8\mathrm{h}) = x_0 \cdot 2^{\frac{8\mathrm{h}}{1\mathrm{h}}} = 1 \cdot 2^8 = 256$$

3. Angenommen, wir lassen unsere Zellkultur 8 Stunden lang wachsen und entdecken, dass sich genau 256 Hefezellen in der Petrischale befinden. Beweist dies, dass unser Modell *wahr* is?
4. Angenommen, nach 8 Stunden sind genau 257 Zellen vorhanden. Ist unser Modell deswegen *falsch*? Ist es *nützlich*?
5. Angenommen, nach 8 Stunden sind 249 Zellen vorhanden. Ist unser Modell *wahr*, *falsch*, *nützlich* oder *nutzlos*?

Deine Antworten auf diese Fragen lehren uns eine wichtige Lektion:

Ein Modell ist niemals Realität; es ist nur eine Möglichkeit, Daten nach unseren eigenen Zwecken zu interpretieren.

Wir können *nie* beweisen, dass ein Modell wahr ist; wir können es nur verwenden, um neue Daten vorherzusagen und diese Vorhersagen dann durch neue Messungen testen. Aber wenn Modelle niemals wahr oder real sind, was können wir dann tun, um ihre Nützlichkeit zu testen? Schließlich hängt der Nutzen eines Modells davon ab, wie gut es unsere eigenen Zwecke als lebende Organismen erfüllt.

Wir versetzen uns in die Handlung des Modells hinein

Modelle eignen sich hervorragend zum Berechnen und Vorhersagen von Messgrößen, aber sie müssen auf zwei Weisen *aligniert* werden: mit den Beobachtungsdaten und mit unseren kausalen Geschichten darüber, wie die Dinge funktionieren. Um die Nützlichkeit eines Modells zu testen, müssen wir es zusammen mit anderen relevanten Modellen integrieren, um eine kausal zusammenhängende Handlung zu generieren, die sich im Laufe der Zeit entfaltet:

Handlung erklärt das Werden unserer Welt: Warum verursacht ein Datenereignis ein anderes?

Das Exponentialmodell $x(t) \equiv x_0 \cdot 2^{t/T_2}$ zur Basis 2 gibt uns eine schnelle Möglichkeit, die Anzahl der Zellen nach der Zeit t zu *berechnen*, aber das bedeutet noch nicht, dass wir *verstehen*, was passiert. Die Mathematik des 20. Jahrhunderts zeigte, *dass wir für die meisten Dinge nie ein Modell finden werden!* Stattdessen versuchen wir, die Dinge zu *verstehen* – also die Geschichte ihrer Entstehung zu erkennen. Geschichten liegen allem Verstehen zugrunde: Wenn ich dir die Geschichte nicht erzählen kann, wie etwas funktioniert, verstehe ich es nicht.

Die Handlung einer Geschichte spezifiziert die *kausale Relevanz*: Sie sagt uns, *warum* Ereignisse passieren, indem sie angibt, welche Akteure im Laufe der Zeit interagieren, um diese Ereignisse zu bewirken. In der Geschichte von Hänsel und Gretel verstehen wir, dass ihr Vater und ihre Stiefmutter dafür relevant sind, dass sie sich im Wald verirren.

Die Handlung der Hefezellen sollte uns erzählen, wie sie miteinander interagieren, um das Verdoppelungsverhalten zu verursachen, also müssen wir darüber nachdenken, wie sich Zellen im Laufe der Zeit *replizieren* (Kopien von sich selbst herstellen). Diese Handlung sagt uns zwei Dinge:

- Die Replikation ist *keine* getaktete Abfolge von Verdoppelungsrelationen, sondern eine kontinuierliche, dynamische Handlung fortlaufender Fortpflanzung. Über jeden kleinen Zeitschritt Δt („***Delta t***“) wächst $x(t)$ mit einer Rate $\dot{x}(t)$ und nimmt um einen Betrag Δx zu, der durch die ***Handlungs-Gleichung*** gegeben ist:

$$\Delta x \approx \dot{x} \cdot \Delta t$$

- Zu jedem Zeitpunkt kann sich *jede* Zelle mit einer bestimmten konstanten Rate μ replizieren, die wir als die ***relative Wachstumsrate*** der Hefezellen bezeichnen. Wenn wir also x Zellen haben, muss die Gesamtpopulation mit der Rate $\mu \cdot x$ zunehmen, das heißt: *die Wachstumsrate $\dot{x}$ muss proportional zur aktuellen Population x sein!* Dies ist das kennzeichnende Merkmal der ***Exponentialgleichung***:

$$\dot{x} = \mu \cdot x$$

Wenn wir die Handlungs-Gleichung mit der Exponentialgleichung kombinieren, erhalten wir unsere Replikationstheorie:

$$\Delta x \approx \dot{x} \cdot \Delta t = \mu\, x \cdot \Delta t$$

Das wirklich Tolle daran ist, dass wir diese Gleichung auf zwei verschiedene Arten verwenden können. Entweder dividieren wir beide Seiten durch Δt, um eine ***Differentialgleichung*** zu erhalten, die eine Handlung aus unserem Modell generiert:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx \frac{dx}{dt} = \mu\, x$$

Oder indem wir all die kleinen Veränderungen Δx im Laufe der Zeit *akkumulieren*, berechnen wir Werte, die wir verwenden können, um unser Modell mit unseren Messdaten zu ***alignieren***:

$$x(T) = \sum_0^T \Delta x \approx \int_0^T dx = \int_0^T \mu\, x \cdot dt$$

*Wir **abstrahieren** die genaue Relation μ aus der Replikation heraus*

Okay, bauen wir eine Theorie auf! Zuerst verwenden wir die obige Differentialgleichung, um eine Handlung zu generieren:

$$\frac{dx}{dt} = \mu\, x$$

Die einzige Funktion, die diese Gleichung erfüllt, ist die Exponentialfunktion:

$$x(t) = x_0\, e^{\mu t}$$

Aber wir wissen, dass sich unsere Population nach jeder Verdopplungsperiode T_2 verdoppeln muss, also:

$$2\, x_0 = x(T_2) = x_0\, e^{\mu T_2}$$

Also $e^{\mu T_2} = 2$, und deswegen

$$\mu = \frac{\ln(2)}{T_2}$$

Dies ist die Handlung der Replikation: $x(t) = x_0\, e^{\mu t}$, wobei $\mu = \ln(2)/T_2$.

Wir __wenden__ unsere neue Theorie der Replikation __an__

Nun können wir unsere Theorie anwenden, um Werte zu berechnen, die wir mit experimentellen Daten alignieren können. Für unsere Hefezelldaten gilt $T_2 = 1$ hr, was uns diese alignierte Lösung liefert:

$$x(t) = x_0\, e^{\mu t}; \quad \mu = \ln 2\ \mathrm{hr}^{-1} \approx 0.693\, \mathrm{hr}^{-1}; \quad x_0 = 1$$

Anhand dieser alignierten Lösung können wir theoretische Werte von x zu den experimentellen Messzeitpunkten berechnen:

6. Berechne selber mit der alignierten Lösung, dass: $x(1\ \mathrm{hr}) = 1 \cdot e^{(\ln 2\ \mathrm{hr}^{-1})\cdot(1\ \mathrm{hr})}$.
7. Berechne selber mit der alignierten Lösung, dass: $x(2\ \mathrm{hr}) = 1 \cdot e^{(\ln 2\ \mathrm{hr}^{-1})\cdot(2\ \mathrm{hr})}$.
8. Berechne selber mit der alignierten Lösung, dass: $x(3\ \mathrm{hr}) = 1 \cdot e^{(\ln 2\ \mathrm{hr}^{-1})\cdot(3\ \mathrm{hr})}$.

Bingo! Diese Werte stimmen mit unseren experimentellen Daten überein, daher scheint unsere Theorie nützlich zu sein.

Erklärung = Modell + Handlung

Es gibt jedoch ein letztes kniffliges Problem, das wir beachten sollten: *Genauigkeit*. Um *genaue* Ergebnisse zu berechnen, möchten wir die Zeit eigentlich *kontinuierlich* fließen lassen – und nicht diskret voran hopsen. Aber das bedeutet, dass wir den Zeitschritt *unendlich klein* machen müssten, $\Delta t \to 0$, und das ist natürlich in einem Computer nicht möglich.

Aber für uns physische Organismen ist es *schon* möglich! Ich kann nicht genug betonen, wie wichtig dieser Unterschied ist: *Computer besitzen kein Konzept von kausaler, dynamischer Zeit*. Ein Computer erlebt den Lauf der Zeit nicht; es liest nur den aktuellen (diskreten) Wert seiner Eingabedaten und reagiert darauf. Wir Organismen bewegen uns jedoch kontinuierlich durch die Zeit und erleben den kausalen Fluss der Wirkung von einem Ereignis auf ein anderes.

In den 1660er Jahren zeigten sowohl Isaac Newton als auch Gottfried Wilhelm von Leibnitz gleichzeitig, wie wir unsere Vorhersagen exakt machen können, indem wir $\Delta t \to 0$ in unseren Modellen lassen. Diese Idee nennt man *Kalkül*. Sie basiert auf der Handlungs-Gleichung $\Delta x \approx \dot{x} \cdot \Delta t$ und verändert vollständig unsere Denkweise darüber, wie ein Ereignis ein anderes verursacht.

Allerdings muss ich ehrlich zu Dir sein. Kausalität in biologischen Systemen ist so komplex, dass wir sie in der Regel *nicht* exakt lösen können – wir müssen sie stattdessen grob im Computer simulieren. Die Physik hatte jedoch das große Glück, eine ganze Familie einfacher Systeme (so genannte *lineare* Systeme) zu entdecken, die wir exakt lösen können. Dazu gehören die Bewegung des Mondes oder ein fallender Stein, aber auch unsere Hefepopulation!

Aufgrund dieses glücklichen Zufalls konnte sich die mathematische Physik in den Jahrhunderten nach Newton und Leibnitz viel schneller entwickeln als die Biologie. *Wir* (Du und ich!) haben jedoch das Glück, in einer aufregenden Zeit zu leben, in der die mathematische Biologie endlich wichtige Beiträge zu Wissenschaft und Medizin leistet!

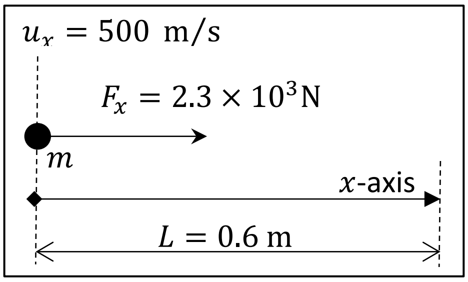
Ressourcen: __Überfliege__ diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

???

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt *gemeinsam*!

Jetzt wissen wir, wie man eine wissenschaftliche Theorie konstruiert. Also probieren wir es selber! Wir werden jetzt Newtons Theorie der Mechanik konstruieren, um Galileos Gleichungen für konstante Beschleunigung herzuleiten.

Der Konstruktionszyklus generiert Handlung



Betrachten wir ein sehr einfaches System, das rechts gezeigt wird: Ein *Time-of-Flight-Massenanalysator* (TOF) misst die Masse eines Moleküls, indem er es entlang einer Strecke der Länge L konstant beschleunigt; größere Moleküle brauchen länger, um diesen Weg zurückzulegen, daher können wir die Flugzeit verwenden, um ihre Masse zu berechnen. Heute morgen habe ich einige Moleküle eines bestimmten Peptids mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $u = 500\ \mathrm{m/s}$ in den TOF auf meinem Nachttisch zu Hause (!) geworfen. In meinem Nachttisch-TOF wurden sie durch eine konstante Kraft von $F_x = 2.30 \times 10^3\mathrm{N}$ über einen Abstand $L = 0.60\ \mathrm{m}$ beschleunigt; ihre Flugzeit betrug $T = 7.08 \times 10^{-14}\ \mathrm{s}$. *Wie sind die Masse und der Name der Peptidmoleküle?*

Ein wichtiger Leitfaden dieses Kurses ist, dass der Konstruktionszyklus uns einen sehr mächtiges Werkzeug bietet, alle Arten von Problemen zu lösen, und wir werden den Zyklus tatsächlich verwenden, um dieses TOF-Problem zu lösen. Da wir aber noch nicht über alle Werkzeuge verfügen, die wir benötigen, um dieses Problem zu lösen, werden wir dieses erste Mal etwas länger brauchen, als Du selber benötigen wirst, wenn Du Aufgaben löst.

Erkennen des Problems

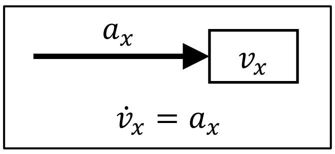
Wie immer beginnen wir mit einem Modell, um unser Problem zu erkennen. In der Wissenschaft enthält ein Modell fast immer ein Diagramm und einen Satz exakter mathematischer Gleichungen, die die Problemsituation beschreiben. Später generieren wir aus diesem Modell eine Handlung, um ein Ergebnis zu berechnen, aber für jetzt wollen wir einfach das Problem selbst erkennen.

Unser Diagramm des Problems ist das oben gezeigte Diagramm des TOFs, und die erste Gleichung, die wir brauchen, ist die Definition der Kraft aus Newton 2:

$$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$$

Wenn wir die Beschleunigung der Moleküle in x -Richtung berechnen können, können wir ihre Masse m berechnen, indem wir die Variablen in Newton 2 umtauschen: $m = F_x/a_x$. Wie berechnen wir also a_x?

Wir schaffen das, indem wir das ***dynamische Modell*** auf der rechten Seite erstellen. Dieses Modell zeigt, wie sich die *x-Geschwindigkeit* v_x der Moleküle mit der Zeit t ändert. Nachdem wir dies getan haben, werden wir eine ähnliche Idee verwenden, um ein Modell zu konstruieren, wie sich die von den Molekülen zurückgelegte Strecke s über die Zeit t ändert.



Unser dynamisches Modell besagt, dass $\dot{v}_x = a_x$. Das heißt, die Änderungsrate von v_x über die Zeit ist einfach die Beschleunigung a_x, und da sowohl F_x als auch m konstant sind, sagt uns Newtons erstes Gesetz, dass a auch konstant ist.

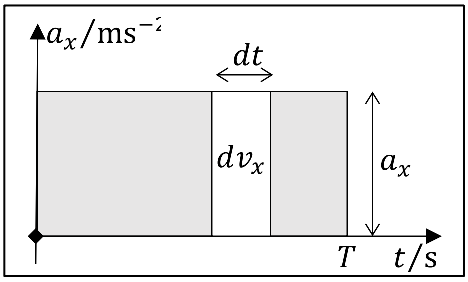
Sich hineinversetzen in die Handlung des Problems

Wie immer können wir uns den Fluss a_x als einen Wasserhahn vorstellen, der Wasser mit einer bestimmten (konstanten) Rate in die Badewanne v_x fließen lässt. Diese Idee generiert eine Handlung, in der:

$$v_x(0) = u_x = 500\ \mathrm{m/s}\,; \quad \Delta v_x \approx \dot{v}_x \cdot \Delta t = a_x \cdot \Delta t; \quad \Delta t \to 0$$

Nun definieren wir ein ***Differential*** als eine unendlich kleine Änderung: $dt \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \Delta t$. Das heißt, dt ist das *Zeitdifferential*, das wir erhalten, wenn wir Δt unendlich nahe Null bringen. Und in diesem Fall erhalten wir

$$dv_x \equiv \lim_{\Delta v_x \to 0} \Delta v_x = \lim_{\Delta t \to 0} a_x \cdot \Delta t = a_x \cdot dt$$



Mit anderen Worten, während die Zeit mit jedem winzigen Schritt dt vorwärts fließt, wächst auch v_x um einen winzigen Betrag $dv_x = a_x \cdot dt$. Beachte, dass diese Änderung von v_x gleich der Fläche des unendlich dünnen weißen Streifens ist, der links unter dem a_x/t-Graphen angezeigt wird. Die Höhe dieses Streifens ist a und die Breite ist dt.

In dem Fall ist die Gesamtänderung von v_x über die Zeit von $t = 0$ bis $t = T$ die Summe all dieser unendlich dünnen Streifen dv_x. Wir nennen diese Summe unendlich kleiner Beiträge ein ***Integral*** und schreiben es so:

$$\int_{t=0}^{T} dv_x = \int_{t=0}^{T} a_x \cdot dt$$

Abstrahieren einer Gleichung aus der Handlung

Wir nennen das Symbol $\int_{t=0}^{T} dv_x$ ein ***bestimmtes*** Integral („*bestimmt*“ deswegen, weil es die bestimmten Grenzen $t = 0$ und $t = T$ angibt). Es bedeutet: „*Die Summe aller dv_x's von $t = 0$ bis $t = T$*“. Da a_x konstant ist, ist diese Summe der infinitesimalen Beiträge zu v_x einfach die Fläche des grauen Rechtecks unter dem a_x/t-Graphen:

$$\text{Gesamtänderung von } v_x = \int_{t=0}^{T} a_x \cdot dt = a_x\, T$$

Anwenden des neuen Modells im konkreten Kontext

9. Verwenden wir unsere brandneue Theorie, um einen Zahlenwert zu berechnen. Nach unserer Theorie beträgt die Geschwindigkeitsänderung der Teilchen $a_x \cdot T$. Die Teilchen starteten jedoch mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_x(0) = 500\ \mathrm{m/s}$. Wir wissen, dass $T = 7.08 \times 10^{-14}$ s. Damit wir ein bisschen in Gang kommen, lasst uns zunächst den Wert von a_x als $2\ \mathrm{m/s^2}$ schätzen und dann den Wert $v_x(0) + a_x\, T$ berechnen.

Wie Du siehst, haben wir jetzt eine Möglichkeit, $v_x(T) = v_x(0) + a_x T$ zu jedem beliebigen Zeitpunkt T zu berechnen. Nicht schlecht! ☺

Erkennen der Ergebnisse des Modells

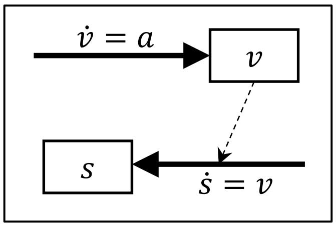
OK, jetzt treten wir in die zweite Iteration des Konstruktionszyklus ein: Wir werden diese numerischen Ergebnisse anhand von Modellen erkennen, die uns bereits bekannt sind. Wir haben eine Handlung generiert, in der sich v_x *linear* (also gerade!) über die Zeit ändert (ausgehend von ihrem Anfangswert):

$$v_x(T) = v_x(0) + \int_{t=0}^{T} a_x \cdot dt = v_x(0) + a_x T$$

Dies ist Galileos *erste* kinematische Gleichung (***Galileo 1***) für Situationen konstanter Beschleunigung über die Zeit t:

$$v_x = u_x + a_x\, t$$

Wir haben früher in diesem Kurs festgestellt, dass diese Gleichung in Situationen mit konstanter Beschleunigung sehr erfolgreich ist. Für unser TOF-Problem wollen wir jedoch nicht die *Geschwindigkeit* der Moleküle kennen. Vielmehr möchten wir wissen, wie die *Strecke*, die sie zurücklegen, von ihrer Flugzeit abhängt. Beachte jedoch Folgendes: Die Beschleunigung a_x sagt uns, wie schnell sich die *Geschwindigkeit* v_x ändert, während diese Geschwindigkeit v_x uns wiederum sagt, wie schnell sich die *Strecke* s_x ändert. Vielleicht können wir noch einmal das gleiche Modell wie vorhin anwenden!

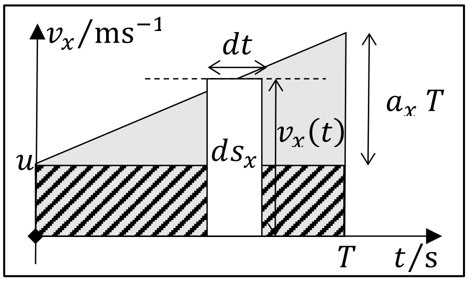


Schaue Dir das dynamische Modell rechts an. Auch hier gibt die konstante Beschleunigung a_x an, wie v_x sich ändern soll, aber es ist auch so, dass v_x wiederum angibt, wie s_x sich ändern soll: $\dot{s}_x = v_x$. Dieses Modell fassen wir durch die folgenden Gleichungen zusammen:

$$u_x = 500\ \mathrm{m/s}; \quad ds_x = \dot{s}_x\, dt = v_x\, dt = (u_x + a_x\, t)\, dt$$

Sich hineinversetzen in die neue Handlung

Es ist jetzt wieder der Fall, dass während die Zeit in dieser neuen Handlung voran fließt, wächst die Strecke s mit jedem winzigen Schritt dt um einen winzigen Betrag $ds_x = v_x \cdot dt$. Zu jedem Zeitpunkt t ist diese Änderung von s_x gleich der Fläche des unendlich dünnen weißen Streifens, der links unter dem v_x/t-Graphen gezeigt ist. Die Höhe dieses Streifens ist $v_x(t)$ und die Breite ist dt. Die Gesamtänderung von s_x über die Zeit von $t = 0$ bis $t = T$ ist also das Integral all dieser unendlich dünnen Streifen ds_x:



$$s_x(T) = \int_{t=0}^{T} v_x\, dt = \int_{t=0}^{T} (u_x + a_x\, t)\, dt$$

Abstrahieren einer neuen Gleichung aus der Handlung

10. Die Fläche unter diesem v_x/t-Graphen besteht aus einem schraffierten Rechteck (Breite T und Höhe u_x) und einem grauen Dreieck (Basis T und Höhe $a_x T$). Was ist die Summe ihrer beiden jeweiligen Flächen?

Wir haben zwei interessante Dinge entdeckt: wie man eine lineare Funktion integriert und Galileis *zweite* kinematische Gleichung (***Galileo 2***):

$$\int_{t=0}^{T} (u_x + a_x\, t)\, dt = u_x\, T + \tfrac{1}{2} a_x\, T^2; \quad s_x(t) = u_x t + \tfrac{1}{2} a_x\, t^2$$

Anwenden des angepassten Modells

OK, wir haben jetzt alles, was wir brauchen, um unsere Theorie zu testen, indem wir die Peptidmoleküle in meinem TOF identifizieren. Newton 2 sagt uns, dass $m = F_x/a_x$. Wir kennen die Kraft $F_x = 2.30 \times 10^3 \mathrm{N}$ und können die Beschleunigung a_x aus Galileo 2 berechnen, indem wir einfach Werte einsetzen: $s_x = L = 0.60\ \mathrm{m}$, $u_x = 500\ \mathrm{m/s}$ and $t = T = 7.08 \times 10^{-14}\ \mathrm{s}$:

$$s_x = u_x t + \tfrac{1}{2} a_x t^2$$

$$\Longrightarrow \qquad a_x = 2\frac{(s-ut)}{t^2} = 2\frac{(L-uT)}{T^2} = \frac{2 \times (0.6\ \mathrm{m} - 500\ \mathrm{m}/\cancel{\mathrm{s}} \times 7.08 \times 10^{-14}\ \cancel{\mathrm{s}})}{(7.08 \times 10^{-14}\ \mathrm{s})^2}$$

$$\Longrightarrow \quad a_x = \frac{2 \times (0.6 - 5 \times 7.08 \times 10^{-12})}{7.08^2 \times 10^{-28}} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{1.2 - 7.08 \times 10^{-11}}{50.1264 \times 10^{-28}} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 2.394 \times 10^{26}\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\Longrightarrow \qquad m = \frac{F_x}{a_x} = \frac{2.3 \times 10^3\ \mathrm{N}}{2.394 \times 10^{26}\ \mathrm{m/s^2}} = 9.608 \times 10^{-24} \mathrm{kg}$$

11. Kannst Du unsere Vorhersage erkennen, indem Du den Namen dieses Peptids im Internet nachschlägst?

Fuß fassen

12. Eine Fallschirmspringerin fällt unter der konstanten Erdbeschleunigung ($g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$) für 5s senkrecht aus einem Flugzeug. Benutze Galileo 1, um ihre Höchstgeschwindigkeit.
13. Berechne nun anhand von Galileo 2, wie weit die Fallschirmspringerin fällt.

Muskeltraining

14. Eine Motorradfahrerin fährt in die positive x-Richtung. An einer Ampel braucht sie $3.2\ \mathrm{s}$, um über eine Strecke von $40\ \mathrm{m}$ gleichmäßig bis zum Stillstand zu bremsen. Was war ihre Anfangsgeschwindigkeit? Was war ihre Beschleunigung während dieser Zeit? Ist diese Beschleunigung positiv oder negativ? Wieso?
15. Verwende Galileo 1 und Galileo 2 um ***Galileo 3*** herzuleiten: $v_x^2 = u_x^2 + 2a_x s_x$.
16. Verwende Galileo 3, um das Landetempo eines Dachziegels zu ermitteln, der $5\ \mathrm{m}$ auf den Boden fällt.
17. Berechne den Wert dieser vier bestimmten Integrale und fasse dann zusammen, was Du dabei entdeckst:

$$\int_{\mathrm{t}=0}^{2} (2t+1)\, dt\,; \quad \int_{\mathrm{x}=0}^{2} (2x+1)\, dx\,; \quad \int_{2}^{4} (2x+1)\, dx\,; \quad \int_{0}^{4} (2x+1)\, dx$$

Zusammenfassung

- ***Galileos kinematische Gleichungen*** beschreiben die Bewegung eines Gegenstands unter konstanter Beschleunigung $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{a}\, t; \quad \boldsymbol{s} = \boldsymbol{u}t + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2; \quad v^2 = u^2 + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{s}$$

- ***Newtons zweites Gesetz*** der Mechanik definiert Kraft über ihre Wirkung auf Masse: $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$.
- Ein ***bestimmtes Integral*** $\int_{t=\alpha}^{\beta} dv$ **S**ummiert alle infinitesimalen Beiträge dv zwischen den Grenzen $t = \alpha$ und $t = \beta$. (Übrigens: Die Symbole α und β sind die ersten beiden Buchstaben „Alpha“ und „Beta“ des griechischen Alphabets.)

- Wir wissen bereits das bestimmte Integral von zwei Funktionen:

  Wenn $v(t) = u$, wobei u konstant ist, dann gilt:

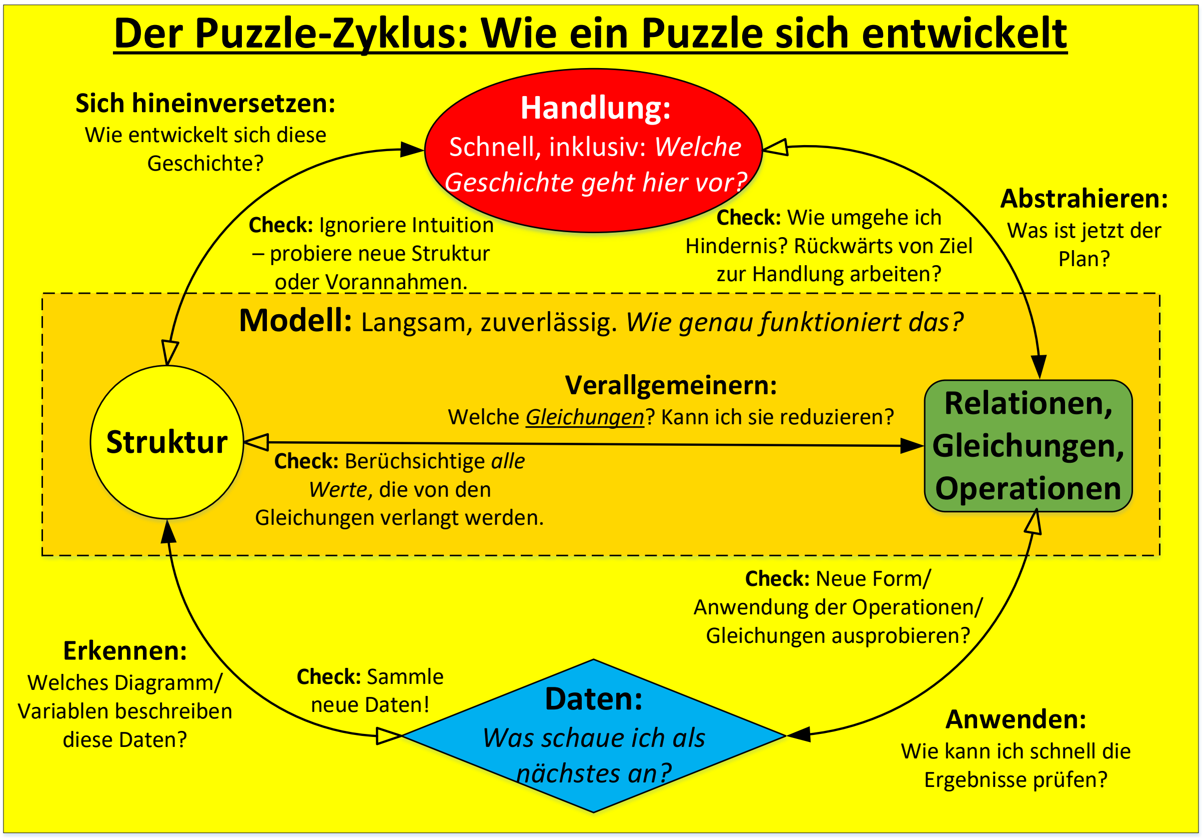
$$\int_{t=t_0}^{T} v \cdot dt = [u\, t]_{t_0}^{T} \equiv (uT - ut_0)$$

  Wenn $v(t) = at$, wobei a konstant ist, dann gilt:

$$\int_{t=t_0}^{T} v \cdot dt = \left[\frac{1}{2} at^2\right]_{t_0}^{T} \equiv \left(\frac{1}{2} aT^2 - \frac{1}{2} a{t_0}^2\right)$$

Konstruktionsübung: <u>*Prüfungsvorbereitung*</u>!

Hier ist der komplette Konstruktionszyklus:



Prepare yourself for learning …

• Was hast Du hier schwierig gefunden? • Wo hast Du nicht mehr weitergewusst? • Was ist Dir noch unklar? • Und … welche Lernfragen bringst zum Unterricht für dieses Kapitel mit?