

# Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

## Module 01: Mathematical-physical methods

### Thema 34: Wie integrieren wir Arbeit?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du ...

- Innere Energie als gelagerte Arbeit beschreiben;
- Thermodynamik I anwenden, um die innere Energie von Feder-, elektrischen und Gravitationsfeldern zu berechnen.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

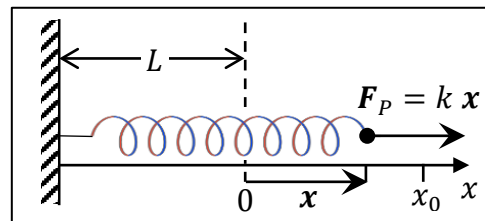
#### Die Akkumulierung von Arbeit in einer Feder ist ein Integral

Erinnern wir uns an eine Berechnung, die wir in einem vorherigen Kapitel durchgeführt haben: die Berechnung der in einer Feder gelagerten inneren Energie. Wir begannen dort mit dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik (Thermodynamik 1):

$$\Delta E_K + \Delta E_I = \Delta W + \Delta Q$$

Vernachlässigen wir zunächst Wärmefluss und kinetische Energie. Konzentrieren wir uns hier auf die innere Energie, die wir in der Feder lagern, wenn wir ihr rechtes Ende nach rechts von der Position  $x = 0$  auf die Position  $x = x_0$  ziehen (siehe rechts):

$$\Delta E_I = \Delta W$$



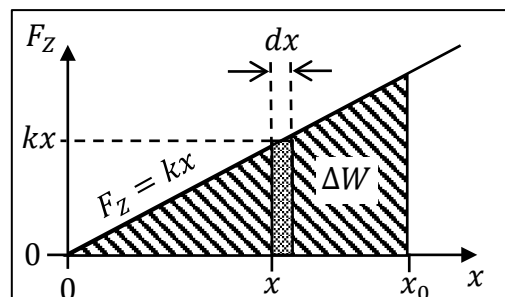
Bei dieser Gleichung ist  $\Delta E_I$  die *Zunahme* der inneren Energie der Feder und ist die Arbeit, die *wir an der Feder* verrichten.

Hookes Gesetz besagt, dass wir eine Zugkraft  $F_Z$  nach rechts anwenden müssen, die proportional zu  $x$  ist, um die Feder über ihre aktuelle Ausdehnung  $x$  hinaus zu dehnen. ( $k$  heißt die **Steifigkeit**, **Federhärte** oder **Federkonstante** der Feder):

$$F_Z = kx$$

Um bei jeder beliebigen Dehnung  $x$  das rechte Ende der Feder um eine weitere, sehr kleine Verschiebung  $dx$  hinauszuziehen, müssen wir an der Feder eine gewisse Menge Arbeit verrichten:

$$dW = F_Z \cdot dx = kx dx$$



Die Gesamtarbeit, die wir beim Dehnen der Feder von  $x = 0$  auf  $x = x_0$  leisten, ist dann die Akkumulation all dieser winzigen Beiträge, die einfach gleich der Gesamtfläche unter dem Kraftdiagramm ist. Die gesamte innere Energie, die wir in der Feder lagern, ist somit also:

$$\Delta E_I = \Delta W = \int_0^{x_0} dW = \int_0^{x_0} kx dx = \left[ \frac{1}{2} kx^2 \right]_0^{x_0} = \left( \frac{1}{2} kx_0^2 - \frac{1}{2} k \cdot 0^2 \right) = \frac{1}{2} kx_0^2$$

Dieses Ergebnis ist in zweierlei Hinsicht ein erstaunlich wichtiges Ergebnis. Denke daran, dass  $\mathbf{F}_R = -\mathbf{F}_Z = -k \mathbf{x}$  die Rückstellkraft ist, mit der die Feder dem Dehnen widersteht. Deswegen:

- Eine Feder lagert innere Energie, indem sie unsere Arbeit an der Feder integriert;
- Unsere Zugkraft ist  $\mathbf{F}_Z = \partial W / \partial \mathbf{x}$ , also ist die Rückstellkraft  $\mathbf{F}_R$  der Feder gleich der *negativen* Ableitung der inneren Energie der Feder:

$$\mathbf{F}_R = -\partial E_I / \partial \mathbf{x}$$

Diese letzte Gleichung gilt für *absolut alle* Felder. Ein Feld übt nämlich eine Kraft auf Objekte aus, die gleich der negativen Steigung ihrer inneren Energie ist. *Felder „wollen“ innere Energie verlieren!*

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

- [Leistung = Verrichtete Arbeit pro Sekunde](#)

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt gemeinsam!

*Wir können einzelne Beiträge zur Arbeit an einer Feder integrieren*

1. Donald Trump (Masse 150 kg) geht Bungee-Jumping von einer Brücke mit einem 10 m Bungee. Er springt von der Brücke und kommt nach kurzem Auf- und Abhüpfen 20 m unterhalb der Brücke zum Ruhezustand. Wie hoch ist die Dehnung des Bungees in diesem Zustand?
2. Was ist die Federkonstante des Bungees?
3. Wie viel Arbeit hat Donald am Bungee geleistet, um diesen Zustand zu erreichen?
4. Wie viel innere Energie hat Donald im Bungee gelagert?
5. Was ist der **Nullpunkt** der inneren Energie des Bungees? Das heißt, bei welcher Dehnung lagert das Bungee *Null* innere Energie?
6. Wenn sich das Bungee an diesem Nullpunkt befindet, enthält es wirklich *absolut keine* Energie? Wenn ja, wie erklärst Du die Tatsache, dass das Bungee überhaupt nicht kalt ist? Wenn nicht, was müssen wir vernachlässigen, um dies einen *Nullpunkt* zu nennen?
7. Zuerst findet Donald das lustig, aber dann springt Ivanka (Masse 50 kg) in einer Aufwallung von Emotionen für ihren Vater von der Brücke, um ihn (sehr fest!) zu umarmen. Nachdem die beiden eine Weile auf- und abgesprungen sind und zur Ruhe gekommen sind, wie lang ist das Bungee?
8. Wie viel Arbeit haben Donald und Ivanka zusammen am Bungee verrichtet?
9. Wie viel Arbeit hat Ivanka allein am Bungee geleistet?
10. Wie könnten wir Ivankas Beitrag zu dieser Arbeit berechnen, *ohne* zuerst Donalds Beitrag zu berechnen?
11. Wie viel zusätzliche Energie ist nun durch Ivankas waghalsigen Gefühlsausbruch im Bungee gelagert?

*Ein E-Feld akkumuliert die darauf verrichtete Arbeit als innere Energie*

12. Im Zentrum der Sonne findet die Kernfusion von Wasserstoff statt, wobei zwei Protonen auf eine Entfernung von  $2 \times 10^{-15}$  m voneinander beschleunigt werden müssen. Wie groß ist die abstoßende Kraft des einen Protons auf das andere bei diesem Abstand?
13. Bei welchem Abstand ist die innere Energie der elektrischen Wechselwirkung zwischen den Protonen besonders *groß*?

14. Bei welchem Abstand ist die innere Energie der elektrischen Wechselwirkung zwischen den Protonen besonders *klein*?
15. Wo befindet sich der Nullpunkt dieser internen Feldenergie; das heißt, bei welchem Abstand gibt es Null Wechselwirkungsenergie zwischen den Protonen?
16. Schreibe ein Integral auf, das die Menge Arbeit berechnet, die die Sonne an den Protonen verrichten muss, um sie vom Nullpunkt nahe genug zusammenzubringen, damit eine Fusion stattfindet?
17. Leite einen mathematischen Ausdruck für die innere Energie, die in der elektrischen Wechselwirkung zwischen den Protonen gelagert ist, nachdem sie so nah zusammengekommen sind.
18. Welchen Wert hat die Ableitung  $-\partial E_I/\partial r$  für eines der Protonen, wenn ihr Abstand voneinander  $2 \times 10^{-15}$  m beträgt? Vergleiche dies mit Deiner früheren Antwort auf die Aufgabe 12.

### *Ein G-Feld akkumuliert die darauf verrichtete Arbeit als innere Energie*

19. Die Masse der Internationalen Raumstation (ISS) beträgt  $4.2 \times 10^5$  kg. 1997 befand sich all diese Masse auf der Erdoberfläche. Wie könnten wir die innere Energie messen, die zu dem Zeitpunkt in ihrer gravitativen Wechselwirkung mit der Erde gelagert war?
20. Um die Wechselwirkungsenergie zu messen, müssen wir die Arbeit berechnen, die beim Bewegen der ISS von einem Nullpunkt zu ihrer aktuellen Position auf der Erdoberfläche geleistet wird. Könnten wir den Erdmittelpunkt als diesen Nullpunkt hernehmen? (*Hinweis: Wie groß ist die Gravitationskraft zwischen ISS und Erde, wenn  $r = 0$ ?*)
21. Sollten wir die Erdoberfläche als Nullpunkt nehmen?
22. Welche Position könnten wir als Nullpunkt hernehmen?
23. Die ISS fliegt in einer Höhe von etwa 400 km über der Erdoberfläche. Wie groß ist die Gravitationskraft auf der ISS in dieser Höhe?
24. Wie viel Arbeit haben die Raketenmissionen zwischen 1998 und 2000 verrichtet, um die Masse der ISS auf diese Höhe zu transportieren?
25. Wie groß ist die Wechselwirkungsenergie  $E_I$  der ISS mit der Erde in dieser Höhe?
26. Welchen Wert hat die Ableitung  $-\partial E_I/\partial r$  für die ISS in dieser Höhe? Vergleiche dies mit Deiner früheren Antwort auf die Aufgabe 23.

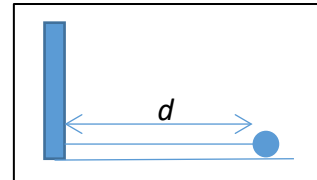
### *Fuß fassen*

27. Schreibe die Gleichung für die verrichtete Arbeit auf, angenommen, dass Kraft und Weg in dieselbe Richtung zeigen. Wie lautet die Gleichung, wenn die Kraft im Winkel zur Bewegungsrichtung steht?
28. Nenne Gleichungen für (a) Leistung-Arbeit, (b) Leistung-Geschwindigkeit.
29. Nenne klar und eindeutig das Prinzip der Energieerhaltung.
30. Was ist die Gleichung zum Berechnen der inneren Energie der gravitativen Interaktion?
31. Eine Kiste wird von einer 250 N Kraft 3 m quer über einen glatten Boden geschoben. Wieviel Arbeit wird dabei verrichtet?
32. Ein Kran hebt einen Betonklotz durch 12 m und verrichtet dabei 34 kJ Arbeit. (a) Was ist die Masse des Klotzes? (b) Welche Leistung bringt der Kran auf, wenn sich der Klotz mit  $0.5 \text{ ms}^{-1}$  nach oben bewegt?
33. Wieviel Arbeit verrichtet ein Cricketspieler, der einen 0.25 kg Cricketball 20 m in die Luft hoch schlägt?

34. Was ist die Rückstellkraft und innere Energie einer Feder mit Eigenlänge 3m und Federkonstante  $24 \text{ Nm}^{-1}$ , die auf 1.5 m komprimiert wird.
35. Ein Auto fährt mit  $22 \text{ ms}^{-1}$ ; dabei bringt der Motor eine Leistung von 350 kW. Was ist die Antriebskraft des Motors?

### Muskeltraining

36. Ein Pferd taut ein Kanalboot mit konstanter Geschwindigkeit zwischen zwei Schleusen, die 1500 m auseinander liegen. Die Zugkraft im Tauseil ist 100 N im Winkel  $40^\circ$  zur Bewegung. (a) Wieviel Arbeit wird am Boot verrichtet? (b) Welche Leistung wird dem Boot bei einer Geschwindigkeit von  $0.8 \text{ ms}^{-1}$  zugeführt?
37. Eine Skateboarderin fährt die eine Seite eines Half-Pipes herunter und dann die andere Seite wieder hoch. Die Seiten sind 2 m hoch. (a) Was wäre ihre Geschwindigkeit am untersten Punkt bei vernachlässigbarer Reibung? (b) Wie weit käme sie die zweite Seite hoch? (c) Echter Beton ist nicht reibungslos; was muss sie dann tun um doch hoch zu kommen?
38. Ich lasse einen 20 g Superball aus einer Höhe von 8 m fallen. (a) Finde die kinetische Energie des Balls direkt bevor er unten ankommt. (b) Der Ball springt 6.5 m wieder hoch. Wie viel Energie wurde durch die Kollision mit dem Boden in Schall und Wärme umgewandelt?
39. Ein Klotz mit Gewicht 10 N ist über eine elastische Schnur mit Eigenlänge 5m und Federkonstante  $9 \text{ Nm}^{-1}$  an der Wand festgemacht (rechts). Der Reibungskoeffizient zwischen Klotz und Boden ist  $\mu = 0.5$ . Ich lasse den Klotz aus einem Abstand  $d > 5 \text{ m}$  von der Wand los, und er rutscht zur Wand hin, bis er genau an der Wand zur Ruhe kommt. Finde einen Ausdruck für die elastische Energie der Schnur in Abhängigkeit von  $d$ , und so berechne  $d$ .



### Numerische Ergebnisse

???

### Konstruktionsübung: Prüfungsvorbereitung!

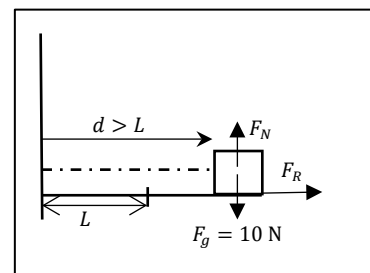
#### Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Ein Klotz mit Gewicht  $10 \text{ N}$  ist über eine elastische Schnur mit Eigenlänge  $5 \text{ m}$  und Federkonstante  $9 \text{ Nm}^{-1}$  an einer Wand festgemacht. Der Reibungskoeffizient zwischen Klotz und Boden ist  $\mu = 0.5$ . Ich ziehe den Klotz einen Abstand  $d > 5 \text{ m}$  von der Wand weg und lasse ihn dann los. Er rutscht zur Wand, bis er genau an der Wand zur Ruhe kommt. Benütze die elastische Energie in der Schnur um  $d$  zu berechnen.

#### Musterlösung:

##### Einordnen

Der Klotz mit Gewicht  $F_g = 10 \text{ N}$  wird an einer elastischen Schnur mit Länge  $L = 5 \text{ m}$  und Federkonstante  $k = 9 \text{ Nm}^{-1}$  um einen Abstand  $d > L$  von der Wand weggezogen. Der Reibungskoeffizient von Klotz und Boden ist  $\mu = 0.5$ . Wir wollen  $d$  berechnen. Da die Schnur elastisch ist, ist der Klotz rechts von  $L$  schneller als links davon. Die Beschleunigung des Klotzes ist nicht konstant, also wir können Galileos Gleichungen nicht benützen!



## Hineinversetzen

Energieerhaltung (Thermodynamik 1) sagt uns, dass die Änderung der Gesamtenergie eines geschlossenen Systems gleich der verrichteten Arbeit an dem System ist. Der Klotz ist sowohl vor dem Loslassen als auch direkt vor der Wand im Ruhezustand, also ist die Gesamtänderung seiner kinetischen Energie  $\Delta E_K = 0$ . Für den Klotz gilt also:

$$\Delta W = \Delta E_I + \Delta E_K = 0$$

Die Arbeit an dem Klotz setzt sich aus zwei Beiträgen zusammen: die innere Energie der Feder wird als Arbeitsbeitrag  $\Delta W_F = \frac{1}{2} k x^2$  auf den Klotz übertragen, und der Boden arbeitet an dem Klotz durch Reibung  $F_R = \mu F_N$ . Da in unserem Fall der Betrag von  $F_N$  gleich dem Betrag von  $F_g$  ist, gilt für die Reibungskraft:  $F_R = \mu F_g$ .

## Plan

1. Ersetze  $x$  in  $\Delta W_F$  und finde somit einen Ausdruck für die innere Energie der Feder vor Loslassen des Klotzes.
2. Ermittle den Beitrag  $\Delta W_B$  aus der Reibung mit dem Boden.
3. Setze  $\Delta W_F + \Delta W_B = 0$  (Energieerhaltung) und löse nach  $d$  auf.

## Anwenden

1. Die ursprüngliche Dehnung der Feder ist  $d - L$ . Also gilt  $\Delta W_F = \frac{1}{2} k (d - L)^2$ .
2.  $\Delta W_B$  ist der Arbeitsbeitrag, den der Boden verrichtet über die Verschiebung  $-d$  des Klotzes nach dem Loslassen:  $\Delta W_B = F_R \cdot (-d) = -\mu F_g d$ .

3. Energieerhaltung:  $\frac{1}{2} k (d - L)^2 - \mu F_g d = 0$ . Wir setzen ein und lösen nach  $d$  auf:

$$\frac{1}{2} 9 \text{ Nm}^{-1} (d - 5 \text{ m})^2 - 0.5 \cdot 10 \text{ N} d = 0$$

$$d^2 - 11,1d \text{ m} - 25 \text{ m}^2 = 0$$

$$d \approx 3.14 \text{ m}; 7.96 \text{ m}$$

Aber  $d > L$ , also gilt:  $d = \underline{7.96 \text{ m}}$

## Ergebnis einordnen

Die Eigenlänge der Schnur ist 5 m und wir dehnen sie auf ca. 8 m. Dieses Verhältnis klingt zumindest plausibel.

## Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Boris Johnson (Masse 100 kg) geht bergsteigen. Er ist über ein elastisches Seil mit vernachlässigbarer Masse und (ungedehnter) Eigenlänge 2 m an einer Felswand festgemacht. Wenn Boris bewegungslos am unteren Ende des Seils hängen würde, dehnt er das Seil um 0.4 m über seine Eigenlänge hinaus. Berechne die Federkonstante des Seils. Boris stürzt aus einer Position ab, in der sein Schwerpunkt in der gleichen Höhe des oberen (befestigten) Endes des Seils ist. Das Seil wird straff nachdem er 2 m heruntergefallen ist. Was ist seine kinetische Energie in diesem Augenblick? Um welchen Abstand muss sich das Seil dehnen, damit es seinen Sturz zum Stillstand bringt? [2.5 kN/m, 2 kJ, 1.73 m]