Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 35: Wie berechne ich ein Integral?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

- Sieben spezifische Techniken zur Berechnung von Integralakkumulationen anwenden (Standing Drinks is Splendid, Man: a Substitute for Partial Parties).

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

Integrieren ist anti-ableiten

Wir haben gesehen, dass wir Akkumulationen mit der Technik des Integrierens berechnen können, aber bisher haben wir uns nur angesehen, wie man ein bestimmtes Integral berechnet:

$$\int_a^b (A\,x + B)\,dx = \left[\tfrac{1}{2}A\,x^2 + Bx\right]_a^b = \left(\tfrac{1}{2}A\,b^2 + Bb\right) - \left(\tfrac{1}{2}A\,a^2 + Ba\right)$$

Auch dieses einfache Integral verwendet bereits drei allgemeinere Integrationsregeln …

Ein bestimmtes Integral ist die Differenz zweier unbestimmter Integrale

Wir können jedes *bestimmte* Integral zwischen den Grenzen a und b berechnen, indem wir an jedem dieser Grenzen ein *unbestimmtes* Integral auswerten und ihre Differenz berechnen. Im vorherigen Kapitel haben wir beispielsweise die Arbeit berechnet, die beim Ausfahren einer Feder geleistet wird.

Die Arbeit, die mit der Dehnung der Feder von einem (möglicherweise unbekannten) Nullpunkt x_0 bis zu einem allgemeinen Punkt x verbunden ist, bezeichnen wir als ***unbestimmtes Integral***:

$$\int F_P(x)\,dx = [\Delta W]_{x_0}^{x}$$

Wie wir im vorigen Kapitel gelernt haben, ist der Arbeitsaufwand beim Dehnen der Feder von a nach b einfach der Arbeitsaufwand beim Ausfahren von x_0 nach b, *abzüglich* der Arbeit beim Ausfahren der Feder von x_0 nach a:

$$\int_a^b F_P(x)\,dx = [\Delta W]_{x_0}^{b} - [\Delta W]_{x_0}^{a} \equiv \left(\int F_P(x)\,dx\right)\Big|_b - \left(\int F_P(x)\,dx\right)\Big|_a$$

Oder für jede beliebige Funktion $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b \equiv \left(\int f(x)\,dx\right)\Big|_b - \left(\int f(x)\,dx\right)\Big|_a$$

Integration ist eine *lineare* Operation

OK, wie berechnen wir also ein unbestimmtes Integral? Zunächst einmal sind Integrale nur Akkumulationen, und natürlich ist die Akkumulation zweier Zuflüsse gleich der Summe der Akkumulation jedes einzelnen Flusses:

$$\int \alpha\, f(x) \pm \beta\, g(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx \pm \beta \int g(x)\, dx$$

Dies bedeutet, dass wir definitiv jedes Integral berechnen können, dessen ***Integrand*** (d. h. die Funktion, die wir integrieren möchten) eine Linearkombination anderer Funktionen ist. Zum Beispiel:

$$\int (3x - 2)\, dx = 3 \int x\, dx - 2 \int 1\, dx$$

Diese Regel ist so einfach, dass wir sie oft vergessen, aber sie ist äußerst nützlich!

Integrieren ist anti-ableiten

Die Handlungs-Gleichung besagt, dass für zwei beliebige Variablen, die wie folgt voneinander abhängen:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,,$$

führt jede kleine Änderung dx zu einer entsprechenden Änderung dy, die sich folgendermaßen ergibt:

$$dy = f(x)\, dx$$

Diese Gleichung sagt uns, dass wir alle Beiträge zu y akkumulieren können, indem wir die entsprechenden Beiträge zu x akkumulieren:

$$y \equiv \int dy = \int f(x)\, dx$$

y ist also genau dann das unbestimmte Integral von $f(x)$, wenn $f(x)$ die Ableitung von y ist. Das sind wunderbare Neuigkeiten! Wenn wir also das unbestimmte Integral einer Funktion $f(x)$ finden wollen, müssen wir lediglich eine Funktion $y(x)$ suchen, deren Ableitung gleich $f(x)$ ist.

Es gibt jedoch einen kleinen Haken. Erinnerst Du Dich daran, dass wir sagten, ein unbestimmtes Integral misst die Akkumulation von einem Nullpunkt aus? Nun, das Problem ist, dass wir nie wirklich wissen, wo dieser Nullpunkt ist. Wir können dieses Problem jedoch leicht lösen, indem wir uns daran erinnern, dass die Ableitung einer Konstanten null ist, sodass die Anti-Ableitung immer eine unbekannte ***Integrationskonstante*** c enthalten kann. Diese Konstante c protokolliert die unbekannte Position des Nullpunktes, und deswegen enthält *jedes* unbestimmte Integral eine Integrationskonstante. Zum Beispiel:

$$\int (A\, x + B)\, dx = \tfrac{1}{2} A\, x^2 + Bx + c$$

Diese Integrationskonstante c hebt sich dann von alleine auf, wenn wir ein *bestimmtes* Integral berechnen, indem wir *unbestimmte* Integrale subtrahieren:

$$\int_a^b f(x)\, dx = [y(x) + c]_a^b = (y(b) + c) - (y(a) + c) = y(b) - y(a) = [y(x)]_a^b$$

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

- Integrieren ist Anti-Ableiten!
- Ganz allgemein: Erhöhe die Potenz um eins – dann teile durch sie
- Das funktioniert sogar auch für Bruchzahl-Potenzen
- Ableitungen und Anti-Ableitungen können wir anhand ihrer Graphen erkennen
- Ein unbestimmtes Integral beschreibt eine ganze Schar von Kurven
- Die genaue Fläche unter einer Kurve ist … <tada!> … ein bestimmtes Integral!
- Direkte Integrale: Funktion multipliziert mit Ableitung der Innereien (igitt!)
- Splitten: Teile Potenzen in nützliche Gruppen auf
- Substitution: Bekämpfe den Drachen, indem Du ihn benennst
- Partialbruchzerlegung: Zerlege komplizierte Brüche in einfachere Teile
- Partielles Integrieren: Für ein Produkt mit verschwindendem Faktor
- Partielles Integrieren: Ein Beispiel

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt *gemeinsam*!

Eine Gedächtnisstütze für die 7 mächtigsten Integrationstechniken

***S**tanding **D**rinks is **S**plendid, **M**an, a **S**ubstitute for **P**artial **P**arties!*

Standing:	*Standardintegrale*	Auswendig lernen!
Drinks:	*Direktintegrale*	Integrandform: $g(x) \cdot f\big(G(x)\big)$
Splendid:	*Splitten*	$[f(x)]^5 \equiv [f(x)]^2 \cdot [f(x)]^3$
Man:	*Manipulation*	Insbesondere Trig-Identitäten!
Substitute:	*Substitution*	$dx \equiv \frac{dx}{du} \cdot du$
Partial:	*Partialbruchzerlegung*	$\frac{ax+b}{x^2-x-2} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$
Parties:	*Partielle Integration*	$\int v \cdot du \equiv uv - \int u \cdot dv$

Standardintegrale sind vorgefertigte Werkzeuge

Standardintegrale sind Integrale, die Du einfach aus dem Regal nimmst und direkt anwendest. Hier sind die gängigsten Standardintegrale:

$$\int k\, x^n\, dx = \tfrac{1}{n+1} k\, x^{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x) + \mathrm{c}$$

$$\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + \mathrm{c}$$

$$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + \mathrm{c}$$

$$\int \exp(x)\, dx = \exp(x) + \mathrm{c}$$

1. Bilde das Integral: $\int e^{3x}\, dx$.

Direkte Integrale

***Wichtig**: Was wir hier **direktes Integrieren** nennen, nennt Sal **u-Substitution**!*

Direktes Integrieren ist einfach die Umdisponierung der Kettenregel vom Ableiten auf Integrieren. Nehmen wir an, wir müssten diesen Ausdruck ableiten:

$$\frac{d}{dx}\left[F\big(G(x)\big)\right] = f\big(G(x)\big) \cdot g(x)$$

wobei $f(x) \equiv F'(x)$ und $g(x) \equiv G'(x)$ die Ableitung der jeweiligen Funktionen sind. In diesem Fall können wir daraus folgern, dass:

$$\int g(x) \cdot f\big(G(x)\big)\, dx = F\big(G(x)\big) + c$$

Wir können also jeden Ausdruck total easy in dem Augenblick integrieren, wo er aus einem Produkt zwischen einer integrierbaren, verschachtelten Funktion $f\big(G(x)\big)$ und der Ableitung $g(x)$ der Innereien dieser Verschachtelung besteht! Diese Form nennen wir ein **direktes Integral**.

2. Bilde das bestimmte Integral $\int_0^{2\pi} x \cdot \cos(x^2)\ dx$. [$\cong 0.4892$]
3. Ein weiteres Beispiel findest Du hier.

Splitten eines Integrals

Hier ***splitten*** wir zum Beispiel höhere Potenzen in nützliche Gruppen …

4. Bilde das Integral $\int \cos^3(x)\ dx$

Manipulation: Benütze Identitäten um Schleimbatzen zu vereinfachen

Insbesondere gibt es unzählige Trig-Identitäten (plus DOTS!), die wir benützen können um komplizierte Integranden zu vereinfachen.

5. Bilde $\int \ln(x^{13})\ dx$.

Substitution: Bekämpfe den Drachen, indem Du ihn benennst

Substitution ist der Fall, den Sal *u-Substitution mit Rücksubstitution* nennt. Die Idee hier ist, dass wir versuchen schwierige Ausdrücke im Integranden durch eine Variable zu ersetzen, damit das ganze einfacher wird. Sals Beispiel ist dieses Integral:

$$\int (x+3)(x-1)^5\, dx$$

Hier ist der Ausdruck $(x-1)$ ein „Drachen“, der unser Integral schwieriger macht. Sal bemerkt, dass alles viel einfacher wäre, wenn stattdessen nur die eine Variable u zur 5-ten Potenz erhöht werden würde:

- Er benennt also den Drachen: $u \equiv (x-1)$;
- Er berechnet $x = u + 1$;
- Er berechnet $dx = du$;
- Er substituiert u in den Integranden um dieses einfachere Integral zu bekommen:$\int (u+4) \cdot u^5\, du$;
- Er evaluiert dieses neue Integral: $\int (u+4) \cdot u^5\, du = \frac{1}{7}u^7 + \frac{2}{3}u^6 + c$;
- Dann macht er anschließend die Rücksubstitution:

$$\tfrac{1}{7}u^7 + \tfrac{2}{3}u^6 + c \equiv \tfrac{1}{7}(x-1)^7 + \tfrac{2}{3}(x-1)^6 + c$$

6. Benütze die Substitution $u \equiv \sec x$ um den exakten Wert dieses Integrals zu berechnen: $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sec^4(x) \tan(x)\ dx$.

Partialbruchzerlegung: Zerlege komplizierte Brüche in einfachere Teile

Zum Beispiel gilt: $\frac{1}{x^2-9} \equiv \frac{1}{6(x-3)} - \frac{1}{6(x+3)}$. Könntest Du die linke Seite integrieren? Nein, ich auch nicht, aber die rechte Seite ist baby-leicht (mit der log-Funktion!).

7. Bilde das Integral $\int \frac{dx}{x^2-9}$.

Partielles Integrieren: Für ein Produkt mit verschwindendem Faktor

Aus der Produktregel für Ableitungen können wir die Regel für partielles Integrieren herleiten:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Diese Regel können wir auch so schreiben:

$$\int u \cdot \frac{dv}{dx}\, dx = uv - \int v \cdot \frac{du}{dx}\, dx$$

oder einfach so:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Mein Geheimtipp: Wenn der Integrand ein Produkt zweier Funktionen ist, von denen die eine durch Ableiten einfacher wird, und die andere durch Integrieren nicht schlimmer wird, dann benenne die erste Funktion u und die zweite $\frac{dv}{dx}$, dann lege los mit partieller Integration!

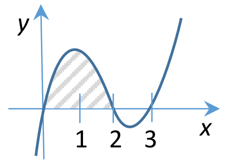
***Warnung**: Manchmal müssen wir mehrmals partiell integrieren!*

8. Bilde dieses Integral: $\int 3x^2 \ln x\, dx$.

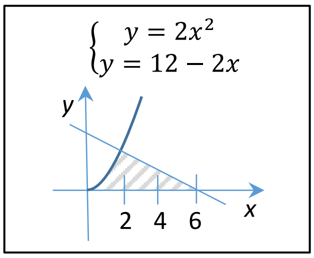
Fuß fassen

9. Schreibe die Schritte zum Integrieren einer Potenz von *x* auf.
10. Was ist ein *unbestimmtes* Integral? Wieso müssen wir beim Berechnen eines unbestimmten Integrals eine Integrationskonstante addieren?
11. Wie kannst Du prüfen, ob Du einen Ausdruck richtig integriert hast?
12. Woran erkennst Du, ob ein Integral ein bestimmtes oder ein unbestimmtes ist?
13. Berechne: (a) $\int 10x^4\, dx$; (b) $\int (3x + 5x^2)\, dx$; (c) $\int x^2(3x + 2)\, dx$.
14. Finde die Gleichung derjenigen Kurve durch den Punkt (1,0), deren Ableitung $\frac{dy}{dx} = 6x - 7$ ist.
15. Finde die Gleichung derjenigen Kurve durch den Punkt (1,0), deren Ableitung $\frac{dy}{dx} = 3x^3 + 2$ ist. Wie kannst Du die Gleichung mit möglichst wenig Aufwand finden, falls die Kurve stattdessen durch (1,2) führt?
16. Welches Merkmal eines Graphs wird durch ein bestimmtes Integral berechnet?
17. Evaluiere: (a) $\int_0^1 (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)\, dx$;
    (b) $\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\, dx$.

$y = x(x-2)(x-3)$
$= x^3 - 5x^2 + 6x$



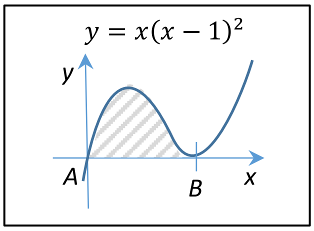
18. Benütze Integration um die schraffierten Fläche der zwei Graphen rechts zu berechnen.



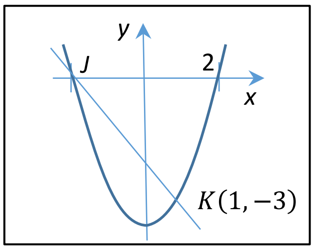
19. Finde: (a) $\int 4e^{2x}dx$; (b) $\int e^{3x-5}dx$; (c) $\int \frac{2}{3x}dx$; (d) $\int \frac{2}{2x+1}dx$.
20. Finde: (a) $\int \cos 4x - \sec^2 7x \, dx$;
    (b) $\int 6 \sec 3x \tan 3x - \csc^2 \frac{x}{5} dx$.
21. Integriere: (a) $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$; (b) $\int 3x^2 e^{x^3} dx$;
    (c) $\int \frac{20x^4+12x^2-12}{x^5+x^3-3x} dx$.
22. Substituiere $u \equiv e^x - 1$ um $\int e^x(e^x+1)(e^x-1)^2 dx$ zu finden.
23. Benütze die Substitution $u \equiv \sec x$ um den exakten Wert des Integrals $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sec^4 x \tan x$ zu berechnen.
24. Benütze partielle Integration um $\int 3x^2 \ln x \, dx$ zu finden.
25. Benütze partielle Integration um $\int 4x \cos 4x \, dx$ zu finden.

Muskeltraining

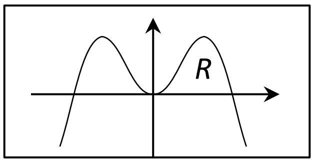
26. (a) Zeige, dass $(5+2\sqrt{x})(5-2\sqrt{x})$ in die Form $a + bx$ umgeschrieben werden kann und gib den Wert der Konstanten *a* und *b* an. (b) Berechne $\int (5+2\sqrt{x})(5-2\sqrt{x}) \, dx$.
27. Sei $f'(x) = (x-1)(3x-1)$, wobei $x > 0$. (a) Finde die Kurve C der Funktion $f(x)$, die durch den Punkt $P(3{,}10)$ führt. (b) Die Gleichung der Normalen zu C beim Punkt P kann in die Form $y = \frac{a-x}{b}$ umgeschrieben werden, wobei $a, b \in \mathbb{Z}$. Finde a und b.
28. Evaluiere $\int_0^2 (2x - 6x^2 + 1) \, dx$.



29. Der Graph rechts zeigt die Kurve $C: y = x(x-1)^2$. Berechne die schraffierte Fläche zwischen dem Schnittpunkt *A* und dem Berührungspunkt *B* von *C* mit der x-Achse.
30. Das untere Diagramm rechts zeigt den Graph der Kurve $D: y = (x+2)(x-2)$. Die Punkte $J(-2{,}0)$ und $K(1,-3)$ liegen auf *D*. (a) Finde die Gleichung der Geraden durch *J* und K in der Form $y = mx + c$. (b) Berechne $\int_{-2}^{1} (x+2)(x-2) \, dx$. (c) Berechne die Fläche zwischen der Kurve und der Geraden.



31. Finde $\int 3e^{5-6x} dx$.
32. Benütze die Substitution $u = \ln x$ um das Integral $\int_1^2 \frac{8}{x} (\ln x + 2)^3 dx$ auf 4 signifikante Stellen genau zu evaluieren.
33. Das Diagramm rechts zeigt den Graph von $y = x \sin x$. Die Region R wird von dieser Kurve und der x-Achse im Bereich $0 \le x \le \pi$ eingegrenzt. Benütze partielle Integration um die exakte Fläche von R zu berechnen.



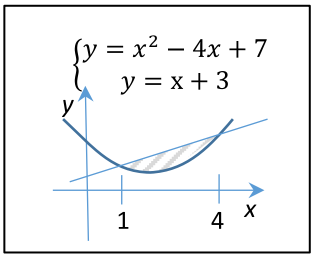
Numerische Ergebnisse

- 13: $[2x^5 + c; \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + c; \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + c]$
- 14: $[y = 3x^2 - 7x + 4]$
- 15: $[y = \frac{3}{4}x^4 + 2x - \frac{11}{4}]$
- 17: [4; 36]
- 18: $[\frac{8}{3}; \frac{64}{3}]$
- 19: [(a) $2e^{2x} + c$; (b) $\frac{1}{3}e^{3x-5} + c$; (c) $\frac{2}{3}\ln x + c$; (d) $\ln(2x+1) + c$]
- 20: [(a) $\frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{7}\tan 7x + c$; (b) $2 \sec 3x + 5 \cot \frac{x}{5} + c$]

- 21: [(a) $\ln \sin x + c$; (b) $e^{x^3} + c$; (c) $4\ln(x^5 + x^3 + 3x) + c$]
- 22: [$\frac{1}{4}(e^x - 1)^4 + \frac{2}{3}(e^x - 1)^3 + c$]
- 23: [3]
- 24: [$x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + c$]
- 25: [$x \sin 4x + \frac{1}{4}\cos 4x + c$]
- 26: [a) 25, −4; b) $25x - 2x^2 + c$]
- 27: [$y = x^3 - 2x^2 + x - 2$; 163; 16]
- 28: [−10]
- 29: [$\frac{1}{12}$]
- 30: [$y = -x - 2\,;\ -9\,;\ -4.5$]
- 31: [$-\frac{1}{2}e^{(5-6x)} + c$]
- 32: [73.21]
- 33: [π]

Konstruktionsübung: *Prüfungsvorbereitung*!

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:



Berechne die schraffierte Fläche einer Metallklinge, deren Form von den zwei Kurven $y = x^2 - 4x + 7$ und $y = x + 3$ zwischen $x = 1$ und $x = 4$ eingegrenzt wird.

Musterlösung:

Einordnen

Wir haben eine Kurve mit der Gleichung $f_1(x){:}\ y = x^2 - 4x + 7$ und eine Kurve mit der Gleichung $f_2(x){:}\ y = x + 3$. Zwischen den Kurven ist eine schraffierte Fläche A, deren Flächeninhalt wir bestimmen sollen.

Hineinversetzen

Wenn wir ein bestimmtes Integral einer Kurve bilden, bekommen wir als Ergebnis die Fläche unter dieser Kurve. Wir können also die Differenz der Integrale der Kurven bilden und davon das bestimmte Integral berechnen.

Plan

1. Bilde die Differenz aus den Integralen der Kurven.
2. Evaluiere das bestimmte Integral um die schraffierte Fläche zu berechnen.

Anwenden

1. Um die schraffierte Fläche zu berechnen, müssen wir zuerst das unbestimmte Integral von $f_2(x) - f_1(x)$ bilden. Dabei ist es egal, ob wir erst die Kurven voneinander abziehen und dann integrieren, oder ob wir erst integrieren und dann die Differenz bilden:

$$\begin{aligned}
\int \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\, dx &= \int f_2(x)\, dx - \int f_1(x)\, dx \\
&= \int (x + 3)\, dx - \int (x^2 - 4x + 7)\, dx \\
&= \left(\tfrac{1}{2}x^2 + 3x + c\right) - \left(\tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 7x + c\right) \\
&= -\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{5}{2}x^2 - 4x + c
\end{aligned}$$

2. Um die Fläche zu bestimmen, bilden wir das bestimmte Integral über dx mit unterer Integrationsgrenze 1 und oberer Integrationsgrenze 4:

$$\int_1^4 \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx = \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{5}{2}x^2 - 4x\right]_1^4 = \left(\tfrac{8}{3}\right) - \left(-\tfrac{11}{6}\right) = \tfrac{9}{2}$$

Der Flächeninhalt der schraffierte Fläche beträgt $\frac{9}{2}$.

Ergebnis einordnen

The parabola has a minimum at $x = 2$, where $y = 3$. Here, the value of the straight line is 5, so the maximum distance between parabola and straight line is 2. So the shaded area is definitely less than $2 \times 4 = 8$, and our answer ($4\frac{1}{2}$) seems about right.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Berechne die Fläche zwischen den zwei Kurven $y = x^2 - 4x + 11$ und $y = 2\mathrm{x} + 3$.

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Benütze die Substitution $u \equiv \sqrt{x^2 - 1}$ um dieses bestimmte Integral zu berechnen: $\int_1^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2 - 1}\; dx$.

Musterlösung:

Einordnen

Anstatt x, verwenden wir eine neue Integrationsvariable $u(x) \equiv \sqrt{x^2 - 1}$ im Integral $I \equiv \int_1^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2 - 1}\, dx$, damit wir I einfacher evaluieren können.

Hineinversetzen

Beim Substitutieren muss man immer die Funktion u ableiten können; das ist hier der Fall: $\frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Plan

1. Ersetze x durch u im Integranden.
2. Ersetze dx durch die entsprechende Form für du.
3. Ersetze die x-Integrationsgrenzen 1 und $\sqrt{2}$ durch die entsprechenden u-Werte.
4. Bilde und evaluiere die substituierte Form des Integrals.

Anwenden

1. Wir brauchen die Beziehung zwischen u und x in beiden Richtungen: $u \equiv \sqrt{x^2 - 1} \Longrightarrow x = \sqrt{u^2 + 1}$. Wenn wir diese Gleichungen in I einsetzen, bekommen wir:

$$I \equiv \int_1^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2 - 1}\, dx \equiv \int_{x=1}^{\sqrt{2}} u\,(u^2 + 1)^{3/2}\, dx$$

2. Ebenso müssen wir die Beziehung zwischen dx und du bestimmen:

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{u}$$

$$\Longrightarrow \qquad dx = \frac{u\,du}{\sqrt{u^2+1}}$$

$$\Longrightarrow \quad I = \int_{x=1}^{\sqrt{2}} \frac{u^2\,(u^2+1)^{3/2}\,du}{\sqrt{u^2+1}} = \int_{x=1}^{\sqrt{2}} u^2(u^2+1)\,du$$

3. Jetzt ersetzen wir auch die Integrationsgrenzen: $u(1) = \sqrt{1^2-1} = 0$ und $u(\sqrt{2}) \equiv \sqrt{2-1} = 1$.
4. Somit haben wir:

$$I = \int_0^1 (u^2+1)\,u^2\,du = \int_0^1 (u^4+u^2)\,du = \left[\tfrac{1}{5}u^5 + \tfrac{1}{3}u^3\right]_0^1 = \underline{\frac{8}{15}}$$

Ergebnis einordnen

Wir können das ursprüngliche Integral durch ein Dreick mit Basis $\sqrt{2}-1$ und Höhe $\left(\sqrt{2}^3\sqrt{2-1}\right) - \left(1^3\sqrt{1^2-1}\right) = 2\sqrt{2}$. Die Fläche dieses Dreiecks ist $\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) = 2-\sqrt{2} \approx 0.586 \approx 8/15$.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Benütze die Substitution $u \equiv \sec(x)$ um dieses bestimmte Integral zu berechnen: $\int_0^{\pi/3} \sec^2(x)\ dx$.