Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 37: Wie manipuliere ich Gleichungen effektiv?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

- Algebraische Brüche umformen und Partialbruchzerlegungen berechnen.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

Algebraische Gleichungen auflösen

Verwende dieses Schema um allgemeine algebraische Gleichungen nach einer bestimmten Variablen x aufzulösen:

***W**ir **B**rauchen **K**eine **E**intrittskarte **F**ürs **I**nternet!*

***W**urzeln, **B**rüche, **K**lammern eliminieren; x auf **E**ine Seite bringen; **F**aktorisieren; x **I**solieren.*

Dies ist oft besonders nützlich beim Integrieren durch Substitution. Hier ist ein Beispiel:

1. Löse die folgende Gleichung nach x auf: $u = \sqrt{\frac{3(x+2)}{x}}$.

Vereinfache rationale Funktionen mit Polynomdivision + Partialbrüchen

Eine ***rationale Funktion*** ist ein Bruch, dessen Zähler und Nenner Polynome sind:

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Dabei sind $p(x)$ und $q(x)$ Polynome.

- Wenn der Grad von $p(x)$ *größer oder gleich* dem Grad von $q(x)$ ist, verwende eine Polynomdivision, um den Grad des *Zähler*-Polynoms zu reduzieren;
- Wenn der Grad von $p(x)$ *kleiner als* der Grad von $q(x)$ ist, verwende eine Partialbruchzerlegung, um den Grad des *Nenner*-Polynoms zu reduzieren.

Hier ist ein Beispiel:

2. Vereinfache diese Rationalfunktion: $\frac{4x+5}{(x+4)(2x-3)}$ (siehe Konstruktionsübung unten).

Denke daran: Exponentialfunktionen machen Mal aus Plus

3. Jod-123 wird medizinisch als radioaktiver Tracer mit einer Halbwertszeit von 13,22 Stunden verwendet. Wie lange dauert es, bis die Radioaktivität einer Probe von $^{123}\mathrm{I}$ auf ein Zehntel ihres Anfangswertes sinkt?

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

Vereinfache Brüche durch Faktorisieren und Kürzen

Addiere und subtrahiere Brüche durch gemeinsame Nenner

Partialbruchzerlegung

Exponentialfunktionen modellieren Wachstum/Zerfall um konstanten Faktor

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt *gemeinsam*!

Fuß fassen

4. Vereinfache: (a) $\frac{4x^2-25}{6x-15}$; (b) $\frac{2x+3}{x-2} \times \frac{4x-8}{2x^2-3x-9}$; (c) $\frac{x^2-3x}{x+1} : \frac{x}{2}$.
5. Schreibe als einzigen Bruch um: (a) $\frac{x}{2x+1} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x}$; (b) $\frac{2}{x^2-1} - \frac{3x}{x-1} + \frac{x}{x+1}$.
6. Berechne $(x^3 + 2x^2 - x + 19) : (x + 4)$ durch Polynomdivision.
7. Schreibe $2x^3 + 8x^2 + 7x + 8$ in die Form $(Ax^2 + Bx + C)(x + 3) + D$.
8. Zerlege diese Ausdrücke in Partialbrüche: (a) $\frac{4x+5}{(x+4)(2x-3)}$; (b) $\frac{-7x-7}{(3x+1)(x-2)}$; (c) $\frac{x-18}{(x+4)(3x-4)}$; (d) $\frac{5x}{x^2+x-6}$; (e) $\frac{6+4y}{9-y^2}$; (f) $\frac{10x^2+32x+16}{(x+3)(2x+4)(x-2)}$; (g) $\frac{4x^2+12x+6}{x^3+3x^2+2x}$.
9. Zerlege die folgenden Ausdrücke, die wiederholte Faktoren enthalten: (a) $\frac{2x+2}{(x+3)^2}$; (b) $\frac{6x^2+17x+5}{x(x+2)^2}$; (c) $\frac{-18x+14}{(2x-1)^2(x+2)}$; (d) $\frac{8x^2-x-5}{x^3-x^2}$.
10. Zerlege diese ungewöhnlichen Brüche in Partialbrüche: (a) $\frac{2x^2+18x+26}{(x+2)(x+4)}$; (b) $\frac{3x^2+9x+2}{x(x+1)}$; (c) $\frac{24x^2-70x+53}{(2x-3)^2}$; (d) $\frac{3x^3-2x^2-2x-3}{(x+1)(x-2)}$.
11. Moti – mein Motorrad – ist die Liebe meines Lebens. t Jahre nachdem ich sie gekauft habe, hat Moti einen Wert von W €, wobei $W = 7500\, k^{-0.2t}$ ist. (a) Wieviel habe ich ursprünglich für Moti ausgegeben? (b) Nach 5 Jahren ist ihr Wert auf 3000 € gesunken; was ist der Wert von k? (c) Wieviel ist Moti nach 10 Jahren wert? (d) Nach wie vielen Jahren untersteigt Motis Wert 500 €?

Muskeltraining

12. Zerlege die Funktion $f(x) = \frac{5x^2+3x+6}{(3-x)(2x-1)^2}$ in Partialbrüche.
13. Schreibe $x^3 + 15x^2 + 43x - 30$ in die Form $(Ax^2 + Bx + C)(x + 6) + D$ um, wobei A, B, C, D zu bestimmende Konstanten sind.
14. Schreibe $\frac{2x^2-9x-35}{x^2-49}$ als möglichst einfachen Bruch um.
15. Angenommen, dass für $x \neq -\frac{1}{3}$ gilt, dass $\frac{5+9x}{(1+3x)^2} \equiv \frac{A}{(1+3x)^2} + \frac{B}{(1+3x)}$, wobei $A, B \in \mathbb{Z}$, was ist der Wert von *A* und *B*?
16. $\frac{18x^2-15x-62}{(3x+4)(x-2)} \equiv A + \frac{B}{3x+4} + \frac{C}{x-2}$. Finde die Integer-Werte A, B und C.
17. Eine Nerzrasse wird in ein neues Habitat eingeführt. Die Anzahl *N* der Nerze im Habitat über Zeit wird als Exponentialfunktion modelliert: $N = 74e^{0.6t}$ $(t \geq 0)$. (a) Wie viele Nerze wurden ins Habitat eingeführt? (b) Was ist Deine Vorhersage über die Anzahl der Nerze im Habitat nach drei Jahren? (c) Wie viele Jahre dauert es voraussichtlich, bis die Population 10 000 übersteigt? (d) Skizziere einen Graphen der Population über Zeit.
18. Die Radioaktivität A einer Substanz klingt exponentiell ab: $A = A_0 e^{-kt}$, wobei $t \geq 0$ die Zeit in Tagen ist. Dabei gilt $A(0) = 50$ und $A(5) = 42$. (a) Berechne die Konstante A_0. (b) Finde den Wert von k auf 3 Stellen genau. (c) Finde den Wert von $A(10)$ auf eine Einheit genau. (d) *Halbwertszeit* ist die Zeit, die die Substanz braucht, bis ihre Radioaktivität auf die Hälfte des ursprünglichen Werts sinkt. Was ist die Halbwertszeit dieser Substanz auf den nächsten Tag gerundet?

Numerische Ergebnisse

- 4: [(a) $\frac{2x+5}{3}$; (b) $\frac{4}{x-3}$; (c) $\frac{2(x-3)}{x+1}$]
- 5: [(a) $\frac{x^3+2x^2+7x+3}{x^2(2x+1)}$; (b) $\frac{2(1-x^2-2x)}{(x+1)(x-1)}$]
- 6: [$x^2-2x+7; \text{rem: } -9$]
- 7: [$(A,B,C,D)=(2,2,1,5)$]
- 8: [(a) $\frac{1}{x+4}+\frac{2}{2x-3}$; (b) $\frac{2}{3x+1}-\frac{3}{x-2}$; (c) $\frac{11}{8(x+4)}-\frac{25}{8(3x-4)}$; (d) $\frac{3}{x+3}+\frac{2}{x-2}$; (e) $\frac{3}{3-y}-\frac{1}{3+y}$; (f) $\frac{1}{x+3}+\frac{2}{2x+4}+\frac{3}{x-2}$; (g) $\frac{3}{x}+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}$]
- 9: [(a) $\frac{2}{x+3}-\frac{4}{(x+3)^2}$; (b) $\frac{5}{4x}+\frac{19}{4(x+2)}+\frac{5}{5(x+2)^2}$; (c) $\frac{-4}{2x-1}+\frac{2}{(2x-1)^2}+\frac{2}{x+2}$; (d) $\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x-1}$]
- 10: [(a) $2-\frac{1}{x+2}+\frac{7}{x+4}$; (b) $3+\frac{2}{x}+\frac{4}{x+1}$; (c) $6+\frac{1}{2x-3}+\frac{2}{(2x-3)^2}$; (d) $3x+1+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-2}$]
- 11: [(a) 7500€; (b) 2.5; (c) 1200€; (d) 14.8y]
- 12: [$\frac{12}{5(3-x)}+\frac{23}{10(2x-1)}+\frac{7}{2(2x-1)^2}$]
- 13: [$(x^2+9x-11)(x+6)+36$]
- 14: [$\frac{2x+5}{x+7}$]
- 15: [2;3]
- 16: [$6; 3; -2$]
- 17: [(a) 74; (b) 447; (c) 9]
- 18: [(a) 50; (b) 0.0349; (c) 35; (d) 20 Tage]

Konstruktionsübung: *Prüfungsvorbereitung*!

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Zerlege die Funktion $f(x)=\frac{11x+1}{(2x+1)(5x-2)}$ in Partialbrüche.

Musterlösung:

Einordnen

Wir sollen die Funktion $f(x)=\frac{11x+1}{(2x+1)(5x-2)}$ in Partialbrüche zerlegen. Dabei wurde uns die Faktorisierung des Nenners schon vorgegeben.

Hineinversetzen

Wenn wir zwei Brüche in einen Bruch zusammenfassen wollen, müssen beide Brüche den gleichen Nenner haben. Deshalb müssen wir oft die Brüche erweitern. Diesen Gedanken verwenden wir auch um einen Bruch in Partialbrüche zu zerlegen. Nur müssen wir das hier andersherum machen. Wir finden zwei Brüche mit unterschiedlichem Nenner, die zusammenaddiert unsere eigentliche Funktion liefern.

Plan

1. Zerlege $f(x)$ in zwei Brüche mit unbekannten Zählern A und B.
2. Vergleiche die Koeffizienten um A und B zu bestimmen.

Anwenden

1. Wir zerlegen diesen Bruch, indem wir ihn mit der Summe von zwei Brüchen mit unbekannten Zählern A und B identifizieren, deren Nenner die Faktoren des ursprünglichen Nenners sind. Dann multiplizieren wir beide Seiten dieser Identität mit dem Produkt dieser Faktoren:

Sei $\frac{11x+1}{(2x+1)(5x-2)} \equiv \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{5x-2}$
$\Longrightarrow \quad 11x + 1 \equiv A(5x - 2) + B(2x + 1)$
$\Longrightarrow \quad 11x + 1 \equiv 5Ax - 2A + 2Bx + B$

2. Diese Identität liefert uns durch Vergleich der Koeffizienten die zwei Gleichungen:
   - $1 = -2A + B \Longrightarrow B = 1 + 2A$
   - $11 = 5A + 2B \Longrightarrow 11 = 5A + 2(1 + 2A) \Longrightarrow A = 1; B = 3$

   Also können wir $f(x)$ umschreiben:

$$f(x) \equiv \frac{11x+1}{(2x+1)(5x-2)} \equiv \frac{1}{2x+1} + \frac{3}{5x-2}$$

Ergebnis einordnen

Wenn wir die zwei Teilbrüche zusammen addieren, bekommen wir als Ergebnis die Funktion $f(x)$. Wir haben also richtig in Partialbrüche zerlegt.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Zerlege die Funktion $g(x) = \frac{7x+3}{(3x+1)(5x+2)}$ in Partialbrüche.