

# Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

## Module 01: Mathematical-physical methods

### Thema 38: Wie verwende ich Algebra zur Geometrie?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du ...

- Matrizen anwenden, um Punkt- und Koordinatentransformationen in Vektorräumen durchzuführen.

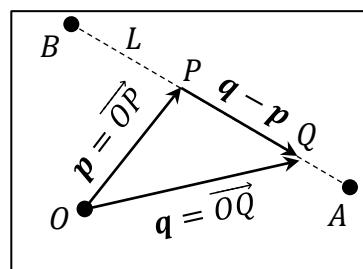
Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

*Wir können Vektoren verwenden, um Geometrie zu betreiben*

**Analytische Geometrie** ist die Verwendung von Algebra (Gleichungen) und Analysis (Grenzwerte) zur Lösung geometrischer Probleme. Als einfaches Beispiel können wir Vektoren verwenden, um geometrische Probleme mit Geraden zu lösen:

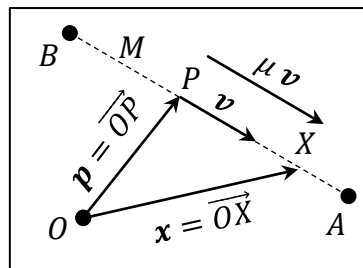
Die Gleichung einer Geraden durch zwei bekannte Punkte

1. Angenommen, wir möchten die Vektorgleichung der Geraden  $L$  finden, die im rechten Diagramm zwei Punkte  $P(2,3,5)$  und  $Q(-2,4,6)$  verbindet. Das heißt, wir wollen einen Ausdruck für den Ortsvektor eines allgemeinen Punktes auf  $L$  finden. Nenne zwei Punkte, die definitiv auf  $L$  liegen.
2. Berechne aus diesen beiden Punkten den Vektor  $\overrightarrow{PQ}$ , der definitiv entlang der Geraden  $L$  zeigt.
3. Die Gleichung eines allgemeinen Punktes  $X$  auf  $L$  ist  $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{PQ} = \mathbf{p} + \lambda (\mathbf{q} - \mathbf{p})$ , wobei  $\lambda$  irgendeine reelle Zahl ist. Welcher Wert von  $\lambda$  ergibt den Punkt  $P$ ?
4. Welcher Wert von  $\lambda$  ergibt den Punkt  $Q$ ?
5. Für den im Diagramm gezeigten Punkt  $A$  ist  $\lambda$  größer, kleiner oder gleich 1?
6. Für den im Diagramm gezeigten Punkt  $B$  ist  $\lambda$  größer, kleiner oder gleich 0?
7. Welche Bedingung muss gelten, damit  $\lambda$  einen Punkt zwischen  $P$  und  $Q$  bestimmt?



Gleichung der Geraden durch einen Punkt, parallel zu einem bekannten Vektor

8. Angenommen, wir wollen die Vektorgleichung der Geraden  $M$  finden, die den Punkt  $P(2,3,5)$  schneidet und im rechten Diagramm in Richtung des Vektors  $\mathbf{v} = (3, -2, 1)$  liegt. Nenne einen Punkt, der definitiv auf  $M$  liegt.
9. Nenne einen Vektor, der in die Richtung von  $M$  zeigt.
10. Die Gleichung eines allgemeinen Punktes  $X$  auf  $M$  ist  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mu \mathbf{v}$ , wobei  $\mu$  eine reelle Zahl ist. Für den im Diagramm gezeigten Punkt  $A$  ist  $\mu$  größer, kleiner oder gleich 1?
11. Für den im Diagramm gezeigten Punkt  $B$  ist  $\mu$  größer, kleiner oder gleich 0?

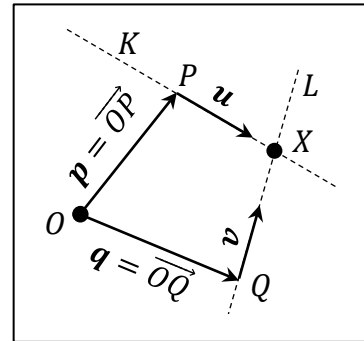


### Find the intersection of two straight lines

12. Wir wollen die Koordinaten des Punktes  $X$  finden, wo sich zwei Geraden  $K$  und  $L$  schneiden, wobei

$$K: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad L: \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Was ist die Bedingung dafür, dass ein allgemeiner Punkt  $X$  auf  $K$  liegt?



13. Was ist die Bedingung dafür, dass der allgemeine Punkt  $X$  auf  $L$  liegt?  
 14. Was ist die Bedingung dafür, dass der allgemeine Punkt  $X$  auf sowohl  $L$  als auch  $L$  liegt?  
 15. Zeige, dass diese Bedingung äquivalent zum folgenden Gleichungssystem ist:

$$\begin{aligned} 2 - 2\kappa &= 2\lambda - 2 \\ 1 - \kappa &= \lambda - 1 \\ 3\kappa + 1 &= 3\lambda + 1 \end{aligned}$$

16. Löse diese Gleichungen und finde die Koordinaten von  $X$ .  
 17. In diesem Problem haben wir *drei* Gleichungen in *zwei* unbekannt Variablen. Wieso könnte dies problematisch sein und was würde uns dieses Problem über den Schnittpunkt  $X$  sagen?

### Eine Matrix stellt eine lineare Kombination dar

Denke an das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\mathbf{x} = \hat{x} - 2\hat{y} - 3\hat{z}$  and  $\mathbf{y} = 4\hat{x} + 5\hat{y} - 6\hat{z}$ :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 + (-3) \cdot (-6) = 4 - 10 + 18 = 12$$

Diese Art, entsprechende Komponenten zu multiplizieren und anschließend zu addieren, nennen wir **Matrixmultiplikation**; wir verwenden sie, um eine beliebige Zeile der Länge  $n$  mit einer entsprechenden Spalte der Länge  $n$  zu multiplizieren:

$$\begin{array}{l} \overbrace{(1 \quad -2 \quad -3)} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}} = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 + (-3) \cdot (-6) \\ \hspace{10em} = 12 \end{array} \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a + 2 \cdot c & 1 \cdot b + 2 \cdot d \\ 3 \cdot a + 4 \cdot c & 3 \cdot b + 4 \cdot d \end{pmatrix} \\ \hspace{10em} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + 4c & 3b + 4d \end{pmatrix}$$

Schaue an, wie die Zeile des ersten Vektors die Spalte des zweiten Vektors „hinuntertaucht“, wobei die Komponenten jeweils multipliziert und anschließend addiert werden. Ein Rechteck aus Komponentenwerten mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten nennen wir eine  $(m \times n)$  **Matrix** (Plural: **Matrizen**). Wir können zwei Matrizen nur dann miteinander multiplizieren, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix gleich der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix ist. Wenn wir das Skalarprodukt zweier Vektoren berechnen, muss die erste Matrix ein **Zeilenvektor** mit  $n$  Komponenten sein und die zweite Matrix muss ein **Spaltenvektor** sein, der ebenfalls genau  $n$  Komponenten enthält.

18. Sei  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ . Falls möglich, berechne das Produkt  $\mathbf{A} \mathbf{B}$ .  
 19. Falls möglich, berechne das Produkt  $\mathbf{B} \mathbf{A}$ .  
 20. Ist Matrixmultiplikation kommutativ?  
 21. Sei  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ . Falls möglich, berechne das Produkt  $\mathbf{A} \mathbf{C}$ .

22. Falls möglich, berechne das Produkt  $\mathbf{C A}$ .
23. Sei  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Falls möglich, berechne das Produkt  $\mathbf{A v}$ .
24. Sei  $\mathbf{u} = (1 \ 2)$ . Falls möglich, berechne das Produkt  $\mathbf{u v}$ .
25. Falls möglich, berechne das Produkt  $\mathbf{v u}$ .

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

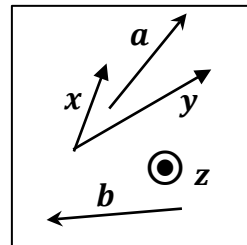
- [Wir können Vektoren verwenden um eine Gerade zu definieren](#)
- [Matrizen sind Tabellen ...](#)
- [... die wir miteinander multiplizieren können](#)

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt gemeinsam!

### Vektoren bilden einen $n$ -dimensionalen Vektorraum

26. In der Abbildung unten rechts sind zwei Vektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$ . Wäre es möglich, eine einzelne Zahl  $y_x \in \mathbb{R}$  zu finden, die uns den Vektor  $\mathbf{y}$  als Vielfaches von  $\mathbf{x}$  liefert; das heißt, so dass:  $\mathbf{y} = y_x \mathbf{x}$ ?

Wenn wir  $\mathbf{y}$  *nicht* als Vielfaches von  $\mathbf{x}$  bilden können, sagen wir, dass  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  **linear unabhängig** voneinander sind. In solchen Fällen können wir  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  als Basisvektoren eines 2-dimensionalen **Vektorraums**  $V_2(\mathbb{R})$  verwenden.  $V_2(\mathbb{R})$  ist der Raum aller Linearkombinationen, die wir mit reellen Koeffizienten ( $\mathbb{R}$ ) aus den beiden Vektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  bilden können.



27. Betrachte nun den dritten Vektor  $\mathbf{a}$ . Wäre es möglich, zwei Zahlen  $a_x, a_y \in \mathbb{R}$  zu finden, die uns  $\mathbf{a}$  als Linearkombination von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  liefern; das heißt, so dass:  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{x} + a_y \mathbf{y}$ ?
28. Wäre es möglich, zwei Zahlen  $b_x$  und  $b_y$  zu finden, die uns den vierten Vektor  $\mathbf{b}$  als Linearkombination von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  liefern; das heißt, so dass:  $\mathbf{b} = b_x \mathbf{x} + b_y \mathbf{y}$ ?
29. Wäre es möglich, zwei Zahlen  $z_x$  und  $z_y$  zu finden, die uns den fünften Vektor  $\mathbf{z}$  als Linearkombination von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  liefern; das heißt, so dass:  $\mathbf{z} = z_x \mathbf{x} + z_y \mathbf{y}$ ?
30. Beschreibe in Worten den Raum  $V_2(\mathbb{R})$  aller Vektoren, die wir durch lineares Kombinieren der beiden Vektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  bilden können.
31. Beschreibe in Worten den Raum  $V_3(\mathbb{R})$  aller Vektoren, die wir durch lineares Kombinieren der drei Vektoren  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{z}$  bilden können.

Die **Dimension**  $\dim(V)$  eines Vektorraums  $V$  ist *die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in  $V$* . Wenn die Dimension von  $V$   $n$  ist, nennen wir den Raum oft  $V_n$ . Eine solche Menge von  $n$  linear unabhängigen Vektoren nennen wir eine **Basis** für  $V_n$ .

### Matrizen sind lineare Transformationen

32. Angenommen, wir haben drei Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$ , die folgendermaßen definiert sind:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{c} = 3\mathbf{a} + 5\mathbf{b} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 44 \end{pmatrix}$$

und eine Matrix  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Berechne den Vektor  $\mathbf{M a}$ .

33. Berechne den Vektor  $\mathbf{M b}$ .
34. Berechne die lineare Kombination  $3(\mathbf{M a}) + 5(\mathbf{M b})$ .
35. Berechne den Vektor  $\mathbf{M c}$ .

36. Vergleiche Deine Antworten auf die beiden vorherigen Übungen. Was sagen sie über die Beziehung zwischen den zwei Ausdrücken  $3(\mathbf{M} \mathbf{a}) + 5(\mathbf{M} \mathbf{b})$  und  $\mathbf{M}(3\mathbf{a} + 5\mathbf{b})$ ?

Eine **lineare Transformation** ist eine Funktion  $T: \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$ , die einen Eingabevektor  $\mathbf{a}$  auf einen Ausgabevektor  $\mathbf{b}$  abbildet und die linear ist in dem Sinne, dass:

$$T(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) \equiv \alpha T(\mathbf{a}) + \beta T(\mathbf{b})$$

37. Verwende die folgenden mathematischen Werkzeuge, um zu beweisen, dass jede  $(2 \times 2)$ -Matrix eine lineare Transformation ist: Eine Matrix  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ; zwei Vektoren  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ; und zwei reelle Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$ .

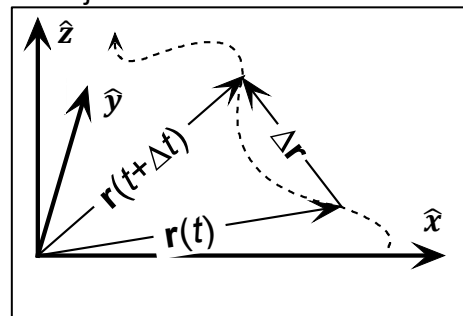
### Wir können Vektoren ableiten

Eine **Vektorfunktion** ist eine parametrische Kurve  $\mathbf{u}(t)$ , die mit jedem Wert eines Parameters  $t$  einen eindeutigen Vektor  $\mathbf{u}$  verbindet:

$$\mathbf{u}(t) \equiv [u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)]$$

Während  $t$  variiert, zeichnet der Ortsvektor  $\mathbf{r}(t)$  eines Käfers einen Weg (oben rechts) nach, der die Laufbahn des wandernden Käfers darstellt.

Wir definieren die **Ableitung** einer Vektorfunktion  $\mathbf{u}(t)$  in üblicher Weise:



$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)}{\Delta t} \right] = [\dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t), \dots, \dot{u}_n(t)]$$

Wir können alle üblichen Regeln zum Ableiten von Funktionen weiterhin verwenden:

$$\frac{d}{dt}(k \cdot \mathbf{u}) = k \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt}; \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}; \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

### Viele nützliche geometrische Transformationen sind linear

38. Wähle irgendeinen konkreten Vektor  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  aus und zeichne diesen Vektor in ein Achsendiagramm auf Papier.

39. Angenommen, wir haben eine Matrix  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Multipliziere diese Matrix mit Deinem ausgewählten Vektor  $\mathbf{r}$ , um den neuen Vektor  $\mathbf{P} \mathbf{r}$  zu bilden.

40. Überprüfe, ob Dein Bildvektor  $\mathbf{P} \mathbf{r}$  das Ergebnis einer Drehung des Vektors  $\mathbf{r}$  um den Ursprung um einen Winkel von  $+\frac{\pi}{2}$  ist.

41. Eine gute Möglichkeit, die Wirkung einer geometrischen Transformation herauszufinden, ist das Transformieren des Einheitsquadrats, das aus den vier Eckpunkten  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  besteht. Was passiert mit dem Einheitsquadrat, wenn wir seine Eckpunkte mit der Matrix  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  multiplizieren?

42. Welche Wirkung hat die Transformation  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  auf das Einheitsquadrat?

43. Untersuche die Wirkung der zwei Transformationen  $\mathbf{P} \mathbf{M}$  und  $\mathbf{M} \mathbf{P}$  auf das Einheitsquadrat.

44. Welche geometrischen Transformationen stellen diese beiden zusammengesetzten Transformationen dar? Machen Deine Ergebnisse Sinn für Dich?

## Bilde die Matrix einer Transformation durch Aufschreiben ihrer Spalten

Angenommen, wir möchten die Punkte eines Bilds um den Ursprungspunkt um einen Winkel von  $-\frac{\pi}{2}$  (also  $90^\circ$  im Uhrzeigersinn) drehen. Wie finden wir die Matrix, die diese Transformation durchführt?

45. Notiere das Spaltenvektorbild des Einheitsvektors  $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  unter dieser Drehung.
46. Notiere das Spaltenvektorbild des Einheitsvektors  $\hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  unter dieser Drehung.
47. Bilde eine Matrix  $N$ , deren erste (linke) Spalte das Bild von  $\hat{x}$  und deren zweite (rechte) Spalte das Bild von  $\hat{y}$  ist.
48. Untersuche die Wirkung der Matrix  $N$  auf das Einheitsquadrat.

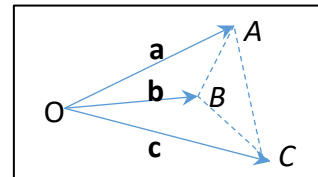
**Take-Home-Nachricht:** Um die Matrix einer beliebigen linearen Transformation  $T$  zu finden, müssen wir also nur die Bilder  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  der zwei Basisvektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  herausfinden und dann diese Bilder als Spalten der Transformationsmatrix  $T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  verwenden.

49. Finde und teste die Matrix, die eine Streckung von  $V_2$  entlang der  $x$ -Achse darstellt, die alle Längen in  $x$ -Richtung verdoppelt, aber Längen in  $y$ -Richtung unverändert lässt.

## Fuß fassen

50. Finde für jeden der folgenden Vektoren zwei weitere, die parallel dazu sind:

(a)  $2\mathbf{a}$ ; (b)  $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ; (c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .



51. Das Diagramm rechts zeigt drei Ortsvektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$ . Beschreibe die folgenden Vektoren in Abhängigkeit von diesen Ortsvektoren: (a)  $\overrightarrow{AB}$ , (b)  $\overrightarrow{BA}$ , (c)  $\overrightarrow{CB}$ , (d)  $\overrightarrow{AC}$ .

52. Bezeichne den Ortsvektor eines Punktes  $P(2, -4, 5)$  in  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ -Form.

53. Finde den Betrag dieser Vektoren: (a)  $3\hat{x} + 4\hat{y} - 2\hat{z}$ , (b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

54. Wenn  $A(1, 2, 3)$  und  $B(3, -1, -2)$ , finde (a)  $|\overrightarrow{AB}|$ , (b)  $|\overrightarrow{OA}|$ , (c)  $|\overrightarrow{OB}|$ .

55. Finde Vektorgleichungen für die folgenden Geraden; gib Deine Antworten in  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ -Form *und auch* in Spaltenvektor-Form: (a) Eine Gerade durch  $(4, 1, 2)$  parallel zum Vektor  $3\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}$ ; (b) Eine Gerade durch  $(2, -1, 1)$  und  $(0, 2, 3)$ .

56. Finde  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , wenn: (a)  $\mathbf{a} = 3\hat{x} + 4\hat{y}$ ,  $\mathbf{b} = \hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z}$ ; (b)  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

57. Finde drei verschiedene Punkte auf der Geraden  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

58. Finde irgendeinen Vektor, der senkrecht zum Vektor  $3\hat{x} + 4\hat{y} - 2\hat{z}$  steht.

59. Sei  $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ . (a) Zeige, dass diese Geraden sich schneiden und finde den Ortsvektor des Schnittpunkts. (b) Finde den Winkel zwischen diesen Geraden.

60. Wenn  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} r & u \\ z & w \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ , wandle  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$  in Zahlengleichungen um.

61. Notiere und löse das Gleichungssystem, das durch die Gleichung  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  dargestellt wird, wenn:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

62. Wenn  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ , überprüfe, ob  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \end{pmatrix}$ .
63. Verwende die Matrizen  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , um zu beweisen, dass Matrixmultiplikation *nicht* kommutativ ist!
64. Wir können die Transformation  $(x', y') = (x + 2y, 4x + y)$  in Matrixform  $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$  umschreiben, wobei  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ . Zeige, dass diese Transformation linear ist.
65. Die Vektorfunktion  $\mathbf{r}(t) = 3t \hat{\mathbf{x}} + t(10 - 5t) \hat{\mathbf{y}}$  repräsentiert die Bewegung über Zeit eines Teilchens in der  $xy$ -Ebene. Zeichne die  $x$ - und  $y$ -Komponenten von  $\mathbf{r}(t)$  in einem Diagramm für Zeitwerte von 0 bis 2 in Schritten von 0.2 s auf. Welche Art von Kraft wirkt vermutlich auf das Teilchen? Berechne durch Ableiten den Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}(t) \equiv \dot{\mathbf{r}}(t)$  des Teilchens und evaluiere dann diesen Geschwindigkeitsvektor zu den Zeitpunkten  $t = 0$ ,  $t = 1$  und  $t = 2$ . Überprüfe, ob diese Werte mit Deinem Diagramm übereinstimmen.
66. Die Position  $\mathbf{r}(t)$  eines bestimmten Teilchens zum Zeitpunkt  $t$  ergibt sich aus  $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t) \hat{\mathbf{x}} + (\sin t) \hat{\mathbf{y}}$ . Finde den Orts- und Geschwindigkeitsvektor dieser Bewegung dieses Teilchens zum Zeitpunkt  $t = \frac{\pi}{2}$ . Welche Art von Bewegung findet hier statt?
67. Überlege Dir eine lineare geometrische Transformation, finde die zugehörige Matrix und tausche sie dann mit einer Freundin aus, um zu sehen, ob sie die Transformation aus der Matrix herausfinden.

## Muskeltraining

68. Ein Viereck hat Vertices  $A(1,5,9)$ ,  $B(3,2,1)$ ,  $C(-2,4,3)$ ,  $D(5, -1, -7)$ . (a) Finde den Vektor  $\overrightarrow{AB}$ . (b)  $C$  und  $D$  liegen auf der Geraden  $L$ . Benütze den Parameter  $\mu$  um die Vektorgleichung von  $L$  auszudrücken. (c) Finde die Koordinaten des Schnittpunkts von  $L$  mit der Geraden  $\overline{AB}$ . (d) Finde den spitzen Winkel zwischen  $L$  und  $\overline{AB}$ . (e) Finden den kürzesten Abstand zwischen  $A$  und  $L$ .
69. Seien  $L_1: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $L_2: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ -21 \\ 11 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$ . (a) Zeige, dass  $L_1$ ,  $L_2$  parallel sind. (b) Zeige, dass der Punkt  $A(2,1,-4)$  auf  $L_1$  liegt. (c) Finde den Ortsvektor des Punkts  $B$  auf  $L_2$ , der so liegt, dass  $\overline{AB}$  sowohl zu  $L_1$  als auch zu  $L_2$  senkrecht steht. (d) Finde  $|\overline{AB}|$ .
70. Seien  $A(3,2,1)$  und  $B(3,-4,-1)$ . (a) Zeige, dass  $\triangle AOB$  ein rechtwinkeliges Dreieck ist. (b) Benütze das Skalarprodukt um den Winkel  $\overline{ABO}$  zu finden. (c) Sei  $C(3,-1,0)$ . Zeige, dass  $\triangle OAC$  gleichschenkelig ist und berechne seine Fläche. (d) Finde eine Vektorgleichung für die Gerade  $L$  durch  $A$  und  $B$ . (e)  $D(a, b, 1)$  liegt auf  $L$ : finde  $a$  und  $b$ .
71. Sei  $\mathbf{r}(t) = r(t) \cdot \hat{\mathbf{e}}(t)$ , wobei  $\hat{\mathbf{e}}(t)$  eine Einheitsvektorfunktion von Zeit ist. Beweise, dass  $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{r}$ .
72. Beweise, dass die Transformation  $(x', y') \equiv (x^2, 0)$  *nicht* linear ist!
73. Finde die Matrix, die eine allgemeine Drehung von  $V_2$  um den Ursprungspunkt um einen Winkel  $+\theta$  darstellt. Berechne dann das Bild des Einheitsquadrats in  $V_2$ .
74. Eine **Dehn**transformation in  $x$ -Richtung multipliziert die  $x$ -Koordinate aller Punkte mit einem konstanten Faktor  $\lambda$ , und dabei bleiben alle  $y$ -Koordinaten unverändert. Finde

die Matrix, die eine Dehnung mit Faktor 2 in  $x$ -Richtung darstellt. Berechne das Bild des Einheitsquadrats in  $V_2$ .

75. (Schwer) Verwende Deine Antworten auf die beiden vorherigen Aufgaben, um die Matrix zu finden, die eine Dehnung mit Faktor 2 in  $(1,1)$ -Richtung zwischen der  $x$ - und  $y$ -Achse darstellt. Überprüfe Deine Antwort, indem Du diese Matrix verwendest, um das Bild des Einheitsquadrats in  $V_2$  zu berechnen.

76. Sei  $\mathbf{u} = (\cos 2t)\hat{x} - t^2\hat{y} + (e^t \sin t)\hat{z}$  und  $\mathbf{v} = \hat{x} + t\hat{y} + (2e^t \sin t)\hat{z}$ . Berechne  $\dot{\mathbf{u}}$  und  $\dot{\mathbf{v}}$ .

### Numerische Ergebnisse

- 50: [z.B.: (a)  $\mathbf{a}$ ;  $4\mathbf{a}$ ; (b)  $6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ ;  $9\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ ; (c)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ;  $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ ]
- 51: [(a)  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ ; (b)  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ; (c)  $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ ; (d)  $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ ]
- 52: [ $2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ ]
- 53: [(a)  $\sqrt{29}$ ; (b)  $\sqrt{6}$ ]
- 54: [(a)  $\sqrt{38}$ ; (b)  $\sqrt{14}$  (c)  $\sqrt{14}$ ]
- 55: [(a)  $\mathbf{r} = (4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + \lambda(3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$ ;  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ; (b)  $\mathbf{r} = (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + \mu(-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ ;  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ]
- 56: [(a)  $-5$ ; (b)  $1$ ]
- 59: [(a)  $\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ ; (b)  $21.6^\circ$ ]
- 68: [(a)  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$ ; (b)  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}$ ; (c)  $(5, -1, -7)$ ; (d)  $19.7^\circ$ ; (e)  $5.9$ ]
- 69: [(c)  $B(4,3, -1)$ ; (d)  $4.1$ ]
- 70: [(b)  $36.3^\circ$ ; (c)  $4.77$ ; (d)  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ ; (e)  $3; 2$ ]

### Konstruktionsübung: Prüfungsvorbereitung!

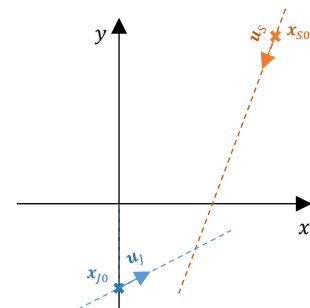
#### Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Jeff befindet sich gerade zuhause am Ort  $\mathbf{x}_{J0} = 0\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$  und bewegt sich mit Geschwindigkeit  $\mathbf{u}_J = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ . Suzanne befindet sich gerade bei der Eisdiele am Ort  $\mathbf{x}_{S0} = 10\mathbf{i} + 13\mathbf{j}$  und bewegt sich mit Geschwindigkeit  $\mathbf{u}_S = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ . Bewegen sie sich rechtwinklig zueinander? Werden sie sich begegnen? Wenn ja, dann wo?

#### Musterlösung:

##### Einordnen

Wir haben den Ortsvektor  $\mathbf{x}_{J0} = 0\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$  gegeben mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{u}_J = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$  und den Ortsvektor  $\mathbf{x}_{S0} = 10\mathbf{i} + 13\mathbf{j}$  mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{u}_S = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ . Wir sollen nun herausfinden, ob sich Jeff und Suzanne rechtwinklig zueinander bewegen und ob sie sich begegnen werden.



## Hineinversetzen

Das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  ist definiert durch:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv ab \cos \theta_{ab}$ . Wenn diese Vektoren orthogonal (also senkrecht) stehen, dann ist ihr Skalarprodukt gleich 0, denn  $\cos(90^\circ) = 0$ . Um zu überprüfen, ob sich Jeff und Suzanne treffen, können wir ihre Geschwindigkeitsvektoren verlängern, indem wir Geraden durch den jeweiligen Ortsvektor ziehen mit der Richtung der Geschwindigkeit.

## Plan

1. Bilde das Skalarprodukt der beiden Geschwindigkeitsvektoren  $\mathbf{u}_J$  und  $\mathbf{u}_S$ .
2. Bilde in Vektor-Form die zwei Geraden, die durch die Ortsvektoren von Jeff und Suzann gehen und parallel zu ihren Geschwindigkeitsvektoren sind.
3. Prüfe, ob sich diese Geraden schneiden.

## Anwenden

1. Wir bilden das Skalarprodukt der Vektoren  $\mathbf{u}_J$  und  $\mathbf{u}_S$  indem wir die jeweiligen Komponenten multiplizieren und addieren:

$$\mathbf{u}_J \cdot \mathbf{u}_S = (2\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = u_{J_1}u_{S_1} + u_{J_2}u_{S_2} = -5$$

Das Skalarprodukt ist ungleich 0 also ist der Winkel zwischen den Vektoren nicht  $90^\circ$ . Sie sind *nicht* rechtwinklig zueinander!

2. Wir benützen den Ortsvektor als Ankerpunkt und die Geschwindigkeit als Richtung der zwei Geraden:

$$G1: \mathbf{x}_{J0} + \mu \mathbf{u}_J = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad G2: \mathbf{x}_{S0} + k \mathbf{u}_S = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix};$$

Jetzt setzen wir die Geraden in eine Gleichung ein und lösen für  $\mu$  und  $k$  auf:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\mu = 10 - 1k \\ -7 + \mu = 13 - 3k \end{cases} \Rightarrow \mu = 2; k = 6$$

Jeff und Suzanne treffen sich also beim Schnittpunkt  $\mathbf{S}$  auf  $G1$ , wo  $\mu = 2$ :  $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ .

## Ergebnis einordnen

Wenn wir stattdessen den Wert  $k = 6$  in die Gerade  $G2$  einsetzen, bekommen wir denselben Punkt  $\mathbf{S}$ .

## Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Meteor MJ236 befindet sich gerade am Ort  $\mathbf{x}_{J0} = 6\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$  und bewegt sich mit Geschwindigkeit  $\mathbf{u}_J = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Planet PS524 ist gerade am Ort  $\mathbf{x}_{S0} = 9\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$  und bewegt sich mit Geschwindigkeit  $\mathbf{u}_S = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ . Bewegen sie sich rechtwinklig zueinander? Werden sie kollidieren? Wenn, dann wo?

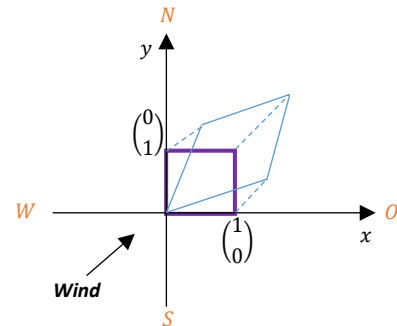
## Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

In einem Mickey Maus Cartoon wird Plutos Nase so fest von einem Wind aus dem Südwesten angeweht, dass sie in Richtung  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (also in Richtung Nordosten) um einen Faktor 2 gestreckt wird. Die Leinwand ist so gerichtet, dass die  $x$ -Achse nach Osten, und die  $y$ -Achse nach Norden zeigt. Welche Matrixtransformation musst Du als Grafiker verwenden, um diese Streckung aller Zeichenpunkte seiner Nase durch zu führen?

## Musterlösung:

### Einordnen

Wir müssen alle Eckpunkte von Plutos Nase (z.B. die vier lila Punkte rechts) transformieren (blau). Wir suchen also eine Matrixtransformation  $M_P$ , die jeden Punkt der  $(x, y)$ -Ebene (z.B. den Vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ) auf einen entsprechenden Bildpunkt abbildet (z.B. siehe rechts).



### Hineinversetzen

Um die richtige Transformation durchzuführen, betrachten wir die Basisvektoren  $\hat{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\hat{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und überlegen uns, was ihre  $x, y$ -Koordinaten nach der erwünschten Transformation wären. Wir können die Streckung nach Nordosten durchführen, indem wir die Vektoren der Zeichnung erst um den Winkel  $-\frac{\pi}{4}$  um den Ursprung drehen, dann in  $x$ -Richtung strecken und anschließend um den Winkel  $+\frac{\pi}{4}$  zurückdrehen.

### Plan

1. Finde die einzelnen Matrizen, die die Basisvektoren drehen und strecken.
2. Multipliziere die Matrizen zusammen, um die endgültige Transformationsmatrix zu erhalten.

### Anwenden

1.  $R_-$  ist die Matrix, mit der wir Punkte um den Winkel  $-\frac{\pi}{4}$  drehen. Die erste Spalte der Matrix ergibt sich aus dem Bild des Basisvektors  $\hat{e}_x$  und die zweite Spalte aus dem Bildvektor von  $\hat{e}_y$ . Diese Gedanken führen wir weiter für die Streckung  $S_x$  (in Richtung Osten) und das Zurückdrehen  $R_+$  der Zeichnung. Wir bekommen diese Matrizen:

$$R_- = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; S_x = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; R_+ = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Wir müssen also diese drei Schritte der Reihe nach durchführen, damit alle Zeichenpunkte von Plutos Nase transformiert werden. Um die Matrix  $M_P$  für die Transformation zu bekommen, multiplizieren wir die Matrizen  $R_+$ ,  $S_x$  und  $R_-$  miteinander. (*Achtung:* Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ. Die Reihenfolge der Matrizen ist von rechts nach links zu lesen.)

$$M_P = R_+ S_x R_- = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}}$$

### Ergebnis einordnen

Multiplizieren wir z.B. den Eckpunkt  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit  $M_P$ , bekommen wir den Bildpunkt  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ , der mit unserer Vorstellung im Diagramm oben übereinstimmt.

### Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

In einem Mickey Maus Cartoon wird Plutos Nase so fest von einem Wind aus der Kompasspeilung  $\pi/3$  ( $= 60^\circ$ ) angeweht, dass sie aus dieser Richtung um einen Faktor  $\frac{1}{2}$  gestaucht wird. Welche Matrixtransformation musst Du als Grafiker verwenden, um diese Stauchung aller Zeichenpunkte seiner Nase durch zu führen?