Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 39: Wo ist das Land, das unsere Enkel kannten?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

- Die Rolle der Komplizität beim Herleiten der relativistischen Mechanik analysieren;
- Kovarianz in Problemen der relativen Bewegung anwenden.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

Nature, and Nature's Laws, lay hid in Night.
God said, "Let Newton be!" and All was Light. (Alexander Pope: 1688–1744)

It did not last: the Devil, howling "Ho!
Let Einstein be!", restored the status quo. (John Collings Squire, 1884–1958)

Wir müssen den Beobachter in die Newtonsche Physik einbeziehen

Wir haben bereits erwähnt, dass es ein Problem mit der Newtonschen Physik gibt, wenn wir die Maxwell-Gleichungen des Elektromagnetismus einbeziehen. Die Maxwell-Gleichungen besagen, dass sich eine Lichtwelle mit einer absoluten Geschwindigkeit von $c \cong 3 \times 10^8\ \mathrm{ms}^{-1} = 300\ 000\ \mathrm{km/s}$ fortbewegen muss, um sich selbst aufrechtzuhalten. Aber die Gleichungen sagen uns nicht, wie wir uns bewegen sollten, um diese Geschwindigkeit zu messen. Diese Frage stellte sich Albert Einstein ab 1900 jeden Tag auf seiner Straßenbahnfahrt zur Arbeit:

1. Wenn jemand neben der Straße ein Licht nach vorne strahlt und meine Straßenbahn auch sehr schnell vorwärts fährt, dann bedeutet das sicherlich, dass ich feststellen werde, dass sich das Licht langsamer bewegt. Aber wird das Licht dann aufhören zu existieren, weil die Maxwell-Gleichungen es nicht mehr unterstützen können?

Je mehr Einstein darüber nachdachte, desto mehr kehrte er zu einem anderen Problem zurück, das Galileo Galilei 300 Jahre zuvor beschäftigt hatte:

2. Unsere Beobachtungen der Welt hängen davon ab, wie wir sie messen. Bewege ich mich während dieser Messung oder nicht? Sitze ich in einer Straßenbahn oder auf einem Karussell? Welche Naturtheorien sind wahr – in kg oder in Pfund ausgedrückt?

Diese Fragen führen uns zu einem neuen Verständnis der Welt. 1995 formulierte Ernst von Glasersfeld die ***konstruktivistische Hypothese*** so:

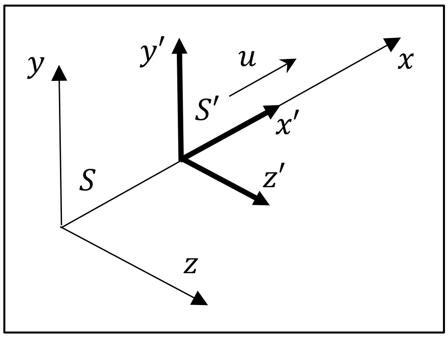
3. Organismen nutzen das Denken *nicht*, um eine objektiv wahre Realität zu entdecken, sondern um *geschickter zu überleben*. Wenn wir dies erkennen, bedeutet Wissenschaft nicht mehr *„die Wahrheit kennen"*, sondern wird zu einem fortlaufenden Prozess der *„Verbesserung der Übereinstimmung zwischen verschiedenen Theorien und Beobachtungen"*. Wie könnte diese Auffassung von Wissenschaft funktionieren?

Einsteins Antwort auf diese Frage bestand darin, die *gesamte* Wissenschaft auf dem *Prinzip der Kovarianz* zu gründen:

Kovarianzprinzip: Es macht nur Sinn, sich eine Gleichung oder Theorie als „real“ vorzustellen, wenn sie *für alle Beobachter dieselbe Form hat*, egal wie sie sie messen und testen. „Realität“ ist alles, worüber wir uns alle einig sind. Ob es „wirklich existiert“ wird dann zur irrelevanten Frage!

Um ein komplexes Problem zu verstehen, mache es zuerst Sehr Einfach!

Alles fing damit an, dass Galileo sagte, eine Frau auf einem Schiff sollte dieselben physikalischen Gesetze erleben wie ein Mann, der auf dem Festland steht. Nehmen wir an, Ms. Apostrophes bewegt sich auf ihrem Schiff am Mr. Still vorbei mit konstanter Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ an der x-Achse entlang – zwischen beiden gilt dann die sogenannte ***Standardkonfiguration***, die wir im Diagramm rechts sehen.



Mr. Stills Bezugsrahmen heißt S; Ms. Apostrophes‘ Bezugsrahmen heißt S'. Der Ursprung von S' bewegt sich also mit Tempo u an der positiven x-Achse von S entlang ab einem Anfangsereignis, bei dem Ms. Apostrophes und Mr. Still ihre Uhren und Positionen initialisieren: $t' = t = 0$, and $x' = x = 0$.

Um besser darüber zu reflektieren, vereinfachen wir alles auf eine minimalistische Situation:

- *Erstens* ignorieren wir die zwei Achsenrichtungen y und z, and konzentrieren uns stattdessen nur auf Bewegungen in die Achsenrichtungen x und t.
- *Zweitens* nehmen wir an, dass Ms. Apostrophes sich gar nicht beschleunigt. Ihr Tempo u ist somit konstant, und die Transformation von den Still-Koordinaten $\boldsymbol{x} = (t, x)$ zu den Apostrophes-Koordinaten $\boldsymbol{x}' = (t', x')$ muss also eine *konstante, lineare* (also *Matrix*-) *Transformation* sein – die ***Lorentz-Transformation*** ($\boldsymbol{L}$):

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \boldsymbol{L} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

oder mit anderen Worten:

$$t' = \alpha t + \beta x$$
$$x' = \delta t + \gamma x$$

Griechische Buchstaben:

α = *Alpha*
β = *Beta*
γ = *Gamma*
δ = *Delta*

Nun verwenden wir das Kovarianzprinzip, um die Form der Lorentz-Transformation $\boldsymbol{L}$ zu entdecken. Um dies zu tun, werden wir verlangen, dass die Ansichten von Herrn Still und Frau Apostrophes in Bezug auf bestimmte Messungen, die sie als „real“ betrachten, aufeinander abgestimmt sind …

Herr Stills Ursprung ist dasselbe Ereignis sowohl in S als auch in S'

Erstens gehen wir davon aus, dass Herrn Stills Standort von auf dem Land so „real“ ist, dass er und Frau Apostrophes sich über seine Position einig sind. Daher befindet sich im Rahmen von Frau Apostrophe zum Zeitpunkt t' der Ursprung $x = 0$ von S an der Position $x' = -ut'$ in S’:

$$\begin{pmatrix} t' \\ -ut' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} t' = \alpha t \\ -ut' = \delta t \end{cases}$$

4. Setze die erste dieser zwei Gleichungen in die zweite ein, um zu zeigen, dass $\delta = -u\alpha$.
5. Schreibe die Lorentz-Transformation anhand dieser Relation in diese Form um:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \boldsymbol{L} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha u & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

Frau Apostrophes' Ursprung ist dasselbe Ereignis in S und in S'
Nun gehen wir davon aus, dass Frau Apostrophes' Standort auf ihrem Schiff ausreichend „real" ist, dass sie und Herr Still sich über seine Position einig sind. Daher liegt zum Zeitpunkt t im Rahmen von Herrn Still der Ursprung $x' = 0$ von S' an der Position $x = ut$ in S, also

$$\begin{pmatrix} t' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha u & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ ut \end{pmatrix}$$

6. Zeige anhand dieser Gleichung, dass $\alpha = \gamma$, und schreibe so die Lorentz-Transformation in diese Form um:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \boldsymbol{L} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \gamma & \beta \\ -\gamma u & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

Symbole wechseln ändert nichts an physikalischen Beobachtungen
Inzwischen haben wir die Lorentz-Transformation $\boldsymbol{L}$ soweit vereinfacht, dass wir uns die Sache etwas erleichtern können, indem wir $\beta \equiv \gamma\, B$ *definieren* und dann γ außerhalb der Matrix verschieben:

$$\boldsymbol{L} \equiv \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & B \\ -u & 1 \end{pmatrix}$$

Da $\boldsymbol{L}$ eine konstante Transformation ist, müssen sowohl γ als auch B Konstanten der Bewegung sein; sie könnten jedoch immer noch vom (konstanten) Tempo u abhängen, also sollten wir eigentlich schreiben:

$$\boldsymbol{L} \equiv \gamma(u) \cdot \begin{pmatrix} 1 & B(u) \\ -u & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Form der Lorentz-Transformation werden wir in der nächsten Folge unserer spannenden Story verwenden!

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!
???

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt *gemeinsam*!

$\boldsymbol{L}$ ist transitiv bezüglich verschiedener Beobachtergeschwindigkeiten
Wieder verwenden wir nun das Kovarianzprinzip, um die Form der Lorentz-Transformation $\boldsymbol{L}$ zu finden:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \boldsymbol{L} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \equiv \gamma(u) \begin{pmatrix} 1 & B(u) \\ -u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

Stelle Dir im nächsten Schritt vor, dass Herr Still (S) auf dem Festland steht und zusieht, wie Frau Apostrophes (S') auf ihrem Schiff mit Tempo u vorbeisegelt, während ihre Tochter Doppel (S'') ihr Bobby-Car *vorwärts* fährt mit Tempo v auf dem Deck des Schiffes in die *gleiche* Richtung wie u. Jetzt: *Wie schnell fährt Doppels Bobby-Car nach der Meinung von Herrn Still?*

7. Du denkst vielleicht, dies sei eine ziemlich dämliche Frage. Wenn sich das Schiff von Frau Apostrophes schließlich mit Tempo u bewegt und Doppel sich mit der Geschwindigkeit v auf dem Schiff bewegt, ist es dann nicht offensichtlich, dass Mr. Still der Meinung ist, dass Doppel sich mit Tempo $w = u + v$ bewegt?! Aber denke jetzt an Einstein in seiner Tram! Was macht unsere Frage absolut zentral für seine Überlegungen?

Wenn $\boldsymbol{L}(u)$ die richtige Transformation zwischen zwei sich mit der Geschwindigkeit u auseinander bewegenden Beobachtern ist, sollten wir in der Lage sein, Doppels Tempo w bezüglich Mr. Still anhand von $\boldsymbol{L}$ zu berechnen. Das tun wir jetzt auf zwei verschiedene Arten und trotzdem sollten wir noch zur gleichen Antwort kommen:

- *Entweder* Herr Still bittet Frau Apostrophes um ihre Messung v von Doppels Tempo und akzeptiert dabei, dass Frau Apostrophes sich selbst mit Tempo u bewegt;
- *Oder aber* Herr Still misst selber direkt das Tempo w von Doppel:

$$\boldsymbol{L}(w) = \boldsymbol{L}(v)\boldsymbol{L}(u)$$

Durch Aufstellen dieser Gleichung fordern wir, dass $\boldsymbol{L}$ *transitiv* sein muss; in diesem Fall folgt:

$$\gamma(w)\begin{pmatrix} 1 & B(w) \\ -w & 1 \end{pmatrix} = \gamma(v)\begin{pmatrix} 1 & B(v) \\ -v & 1 \end{pmatrix} \cdot \gamma(u)\begin{pmatrix} 1 & B(u) \\ -u & 1 \end{pmatrix}$$

8. Multipliziere diese Matrizen miteinander und leite so die folgenden ***Transitivitätsbedingungen*** her:

$$\begin{aligned} \gamma(w) &= \gamma(u)\gamma(v)\big(1 - vB(u)\big) \\ \gamma(w)B(w) &= \gamma(u)\gamma(v)\big(B(u) + B(v)\big) \\ -w\gamma(w) &= -\gamma(u)\gamma(v)(u+v) \\ \gamma(w) &= \gamma(u)\gamma(v)\big(1 - uB(v)\big) \end{aligned}$$

9. Diese Transitivitätsbedingungen liefern uns *super-viel* Information! Zum Beispiel, vergleiche die erste mit der vierten Bedingung und leite so die folgende Gleichung her:

$$\frac{B(u)}{u} = \frac{B(v)}{v}$$

Beachte, dass die linke Seite dieser Gleichung *nur von* u abhängt und die rechte Seite *nur von* v. Aber u und v sind zwei völlig unterschiedliche Geschwindigkeiten (Schiff und Bobby-Car), die *keinerlei Verbindung zueinander* haben! Die beiden Seiten dieser Gleichung können also nur dann für alle Werte von u und v gleich sein, wenn $B(u)/u$ gleich einer Konstanten κ (griechisch: *Kappa*) ist. In diesem Fall gilt $B(u) = \kappa u$ und unsere neue Form für die Lorentz-Transformation ist:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \boldsymbol{L} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \equiv \gamma(u)\begin{pmatrix} 1 & \kappa u \\ -u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

(*Ist das nicht spannend?! Wie ein echter Krimi!* ☺)

Die Regel zum Kombinieren von Geschwindigkeiten ist <u>nicht</u> Addition!

Mit dieser neuen Form von $\boldsymbol{L}$ werden die ersten beiden Transitivitätsbedingungen zu:

$$\begin{aligned} \gamma(w) &= \gamma(u)\gamma(v)(1 - \kappa uv) \\ w \cdot \gamma(w) &= \gamma(u)\gamma(v)(u+v) \end{aligned}$$

10. Dividiere die zweite dieser Gleichungen durch die erste und leite so die folgende korrekte Gleichung zum Kombinieren zweier Tempos her:

$$w = \frac{u+v}{1 - \kappa uv}$$

11. Erkläre, wie für den Fall $\kappa = 0$ dies sich einfach auf das übliche Galileische Gesetz $w = (u+v)$ zum Kombinieren zweier Tempos reduziert.

12. Nehmen wir kurz an, dass $\kappa > 0$. Wähle dann zwei geeignete *positive* Tempos u and v, um zu zeigen, dass es dann möglich ist, diese zu einem *negativen* Tempo w zu kombinieren (d. h. Doppel bewegt sich *rückwärts*)!

Diese Möglichkeit ist physikalisch nicht sinnvoll, daher muss κ negativ sein, und wir stellen dies sicher, indem wir $\kappa \equiv -1/c^2$ *definieren*, wobei c eine Konstante ist. Das ist nun unsere Gleichung für w:

$$w = \frac{u+v}{1+uv/c^2}$$

Dies ist die relativistisch korrekte Geschwindigkeits-Zusammensetzungs-Regel. Beachte, dass wir keine Annahmen über die Lichtgeschwindigkeit gemacht haben: Eine *notwendige Konsequenz* des Kovarianzprinzips ist, dass es eine maximal mögliche Geschwindigkeit c gibt und dass diese Geschwindigkeit für alle Beobachter konstant ist!

13. Beantworte jetzt Einsteins Frage in der Tram zur Arbeit. Angenommen, sowohl Frau Apostrophes‘ Schiff als auch Doppels Bobby-Car wären Lichtgeschwindigkeits-fahrzeuge, so dass $u = v = c$. Wie hoch wäre dann Doppels Tempo laut Herrn Still?
14. Nimm nun die vernünftigere (!) Annahme an, dass sowohl Frau Apostrophes‘ Schiff als auch Doppels Bobby-Car mit halber Lichtgeschwindigkeit fahren: $u = v = c/2$. Was ist dann Doppels Tempo im Referenzrahmen von Mr. Still?

Umkehren der x-Richtung lässt physikalische Ereignisse unverändert

Unsere neue Form der Lorentz-Transformation ist:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \boldsymbol{L} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \equiv \gamma(u) \begin{pmatrix} 1 & -u/c^2 \\ -u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

Wir müssen nur noch die Struktur der ***Lorentz-Faktor*** $\gamma(u)$ herausfinden.

Angenommen, Doppel dreht ihr Bobby-Car um und fährt *rückwärts mit dem gleichen Tempo* wie das Schiff selbst entlang des Schiffes von Frau Apostrophes. In diesem Fall sollte Doppel mit Mr. Still auf derselben Höhe bleiben, oder?

15. Teste dies jetzt. Setze in der Geschwindigkeits-Zusammensetzungs-Regel $v = -u$ und überprüfe, ob dies zur Lösung $w = 0$ führt.
16. Setze nun $v = -u$ und $w = 0$ in der ersten Transitivitätsbedingung:

    $$\gamma(w) = \gamma(u)\gamma(v)\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)$$

    Zeige, dass dies zur folgenden Gleichung führt:

    $$\gamma(0) = \gamma(u)\gamma(-u)(1 - u^2/c^2)$$

17. Wähle nun in dieser Gleichung den Spezialfall $u = 0$ und zeige, dass dies die folgende Bedingung impliziert:

    $$\gamma(u)\gamma(-u)(1 - u^2/c^2) = 1$$

Wir sind fast fertig! Wir machen jetzt noch einen letzten Gebrauch vom Kovarianzprinzip: Wir nehmen an, dass Herr Still und Frau Apostrophe sich über ihre Relativbewegung einig sind, und dass *diese Übereinstimmung unabhängig von der Richtung ihrer x-Achsen ist*. Sie könnten zum Beispiel beide ihre x-Achsen einfach umdrehen, so dass sie in die entgegengesetzte Richtung zeigen, und dann zusätzlich die Geschwindigkeit von Frau Apostrophes durch $-u$ ersetzen:

$$x \longrightarrow -x\,; \quad x' \longrightarrow -x'\,; \quad u \longrightarrow -u$$

18. Nun ist das *gesamte* Verständnis von Herrn Still und Frau Apostrophes bezüglich ihrer relativen Bewegung in der Lorentz-Transformation enthalten. Wenn sie sich einig sind, dass diese Umdrehung ihre relative Bewegung unverändert lässt, besagt das Kovarianzprinzip, dass die Lorentz-Transformation *sowohl vor als auch nach* der Umdrehung funktionieren muss, das heißt:

$$\left[\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \boldsymbol{L}(u)\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}\right] \quad \underline{und} \quad \left[\begin{pmatrix} t' \\ -x' \end{pmatrix} = \boldsymbol{L}(-u)\begin{pmatrix} t \\ -x \end{pmatrix}\right]$$

Verwende diese Bedingung, um zu beweisen, dass $\gamma(u) = \gamma(-u)$.

19. Setze diese Gleichung in die Transitivitätsbedingung aus Aufgabe ein, um zu beweisen, dass die vollständige ***Lorentz-Transformation*** und der ***Lorentz-Faktor*** gegeben sind durch:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma(u)\begin{pmatrix} 1 & -u/c^2 \\ -u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}\,; \quad \gamma(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Dieses Zeug ist wirklich erstaunlich! *Durch rein konstruktivistisches Philosophieren* haben wir gezeigt, dass es eine maximale Geschwindigkeit c geben kann und dass *nichts* schneller als diese Geschwindigkeit reisen kann! Und das Michelson-Morley-Experiment (1881) sagt, dass diese Geschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit ist.

Fuß fassen

Galileo-Bezugsrahmen

20. Ich fahre mit meinem Motorrad auf einer geraden Straße mit konstanter Geschwindigkeit von $30\,\mathrm{m/s}$ ostwärts. Ich fahre an einem Bauernhaus vorbei, und *gerade* als ich am Bauernhaus vorbeikomme, stelle ich meine Uhr auf Null. 60 Meter östlich des Bauernhauses steht eine Kuh am Straßenrand. Wie weit östlich von mir ist die Kuh nach (a) einer Sekunde und (b) 10 Sekunden?
21. Ein Flugzeug fliegt mit $300\ \mathrm{ms}^{-1}$ an mir vorbei: $x_A = (300\ \mathrm{ms}^{-1}) \cdot t$. (a) Wie lautet die Gleichung für meine Position $x_M(t)$ über die Zeit *in meinem eigenen Bezugsrahmen*? (b) Wie lautet die Gleichung für die Position $x_A(t)$ des Flugzeugs über die Zeit *in meinem Rahmen*? (c) Wie lautet die Gleichung für die Position $x'_A(t)$ des Flugzeugs über die Zeit *im eigenen Bezugsrahmen des Flugzeugs*? (d) Wie lautet die Gleichung für meine Position $x'_M(t)$ über die Zeit *im Bezugsrahmen des Flugzeugs*?

Lorentz-Bezugsrahmen

22. Stelle Dir vor, ich fahre in einem Auto mit Geschwindigkeit u an Dir vorbei und werfe einen Ball mit Geschwindigkeit v nach vorne. Wie groß ist Deine Messung $w = \frac{u+v}{1+uv/c^2}$ für die Geschwindigkeit des Balls in jedem der folgenden vier Fälle: a) $u = v = 0$; b) $u = v = c$; c) $u = v = 0.1c$; d) $u = v = 0.5c$? ($0.1c$ ist *sehr schnell:* $\sim 30\,000\ \mathrm{km/s}$)
23. Was ist der Lorentz-Faktor $\gamma(u)$, wenn: a) $u = 0$; b) $u = c$; c) $u = 0.1c$?
24. Berechne die Lorentz-Transformationsmatrix $\gamma(u)\begin{pmatrix} 1 & -u/c^2 \\ -u & 1 \end{pmatrix}$ für jeden der folgenden Fälle: a) $u = 0$; b) $u = c$; c) $u = 0.1c$; d) $u = 0.5c$.

Muskeltraining

25. Beweise, dass das Raumzeitintervall $ds \equiv \sqrt{c^2dt^2 - dx^2}$ zwischen zwei Ereignissen (x, t) und $(x + dx, t + dt)$ eine ***Invariante*** der Lorentz-Transformation ist. Mit

anderen Worten: das Raumzeitintervall bleibt *unverändert* durch die Lorentz-Transformation.

26. **Längenkontraktion:** Verifiziere, dass $x' = \gamma(u)(x - ut)$ unter einer Lorentz-Transformation, und dass daher $\Delta x' = \gamma(u)(\Delta x - u\Delta t)$. Mr. Still ist ein ziemlich seltsamer Herr, der gerne die Länge von Damenrädern misst, während sie vorbeifahren. Während Frau Apostrophes vorbeifährt, zückt er sein ZYGO Verifire™ Laserinterferometer und misst den Abstand zwischen den Vorder- und Hinterrädern von Frau Apostrophes Fahrrad *in einem einzigen Augenblick* ($\Delta t = 0$). Wie hängt die von Frau Apostrophes gemessene Länge $\Delta x'$ des Fahrrads mit der von Mr. Still gemessenen Länge Δx zusammen? Welche Länge ist größer? Wie könnte Mr. Still die *Figur* von Frau Apostrophes beschreiben, während sie vorbeifährt?
27. Eine interessante Anschlussfrage: Wie würde dann Frau Apostrophes die Figur von Herrn Still beschreiben? (Hinweis: Welcher von ihnen bewegt sich *wirklich*?)
28. **Zeitdilatation:** Unter der Lorentz-Transformation gilt $t' = \gamma(u)(t - ux/c^2)$ und somit $\Delta t' = \gamma(u)(\Delta t - u\Delta x/c^2)$. Mr. Still lässt sein ZYGO Verifire™ Interferometer auf den eigenen Zeh fallen und schreit nach einer Reaktionszeit Δt vor Schmerzen; sowohl Fallenlassen als auch Schreien treten an derselben Stelle auf, also $\Delta x = 0$. Was ist Frau Apostrophes' Messung $\Delta t'$ von Mr. Stills Reaktionszeit Δt? Wie würde sie seine Reaktionszeit beschreiben? Welcher von ihnen bewegt sich *wirklich*?
29. Im Ruhezustand haben λ-Teilchen eine Halbwertszeit von 20 ns. Ein λ-Teilchen bewegt sich mit Geschwindigkeit $0.6c$ an mir vorbei; was ist die Halbwertszeit dieses Teilchens in meinem Bezugsrahmen?
30. Myonen sind Teilchen, die in der oberen Atmosphäre entstehen, und fliegen dann herunter mit fast Lichtgeschwindigkeit ($\sim 0.99c$). Im Labor (im Ruhezustand) haben sie eine Halbwertszeit von $1.53\ \mu s$ – *nicht* lang genug, um den Erdboden zu erreichen. Doch wir beobachten hier unten viele eintreffende Myonen – warum?! Suche eine Antwort (a) aus Mr. Stills Perspektive, der auf der Erde sitzt, und (b) aus Ms. Apostrophes' Perspektive, die auf einem Myon der Erdoberfläche entgegen reitet.
31. Um das Universum zu retten, muss Ethan Hunt (aus Mission Impossible) mit fast Lichtgeschwindigkeit in ein schwarzes Loch hineintauchen. Ethan ist genau $1{,}80\ \mathrm{m}$ groß, und muss dabei durch einen Tunnel tauchen, der genau $1{,}79\ \mathrm{m}$ lang ist. Der Haken dabei ist, dass in regelmäßigen Abständen Laser-Messer an beiden Enden des Tunnels gleichzeitig alles durchschneiden, was sich gerade am Eingang und Ausgang des Tunnels befindet.

    Ethan meint: „*Ist doch halb so schlimm. Wenn ich schnell genug durch den Tunnel fliege, bin ich wegen der relativistischen Raumkontraktion kürzer als der Tunnel. Ich muss alles nur so kalkulieren, dass ich rechtzeitig innerhalb des Tunnels bin, während die zwei Laser-Messer zuschneiden, und so komme ich heil davon.*“

    Der Bösewicht Lady Luzifella von Bösen denkt anders: „*Aus Ethans Perspektive heraus befindet er sich im Ruhezustand und der Tunnel bewegt sich auf ihn zu. Somit ist der Tunnel wegen der relativistischen Raumkontraktion kürzer als Ethan, und scheidet ihm bestimmt entweder Kopf oder Füße ab! Ha-ha-ha-ha-ha!*“

    Beide haben recht, und Ethan überlebt: Warum?

32. Im Lied '39 von Queen kehrt ein Raumschiff nach einjähriger Fahrt zur Erde zurück, die sich währenddessen natürlich insgesamt kaum bewegt hat. Die Heimkehrer stellen zu ihrem Entsetzen fest, dass mittlerweile 100 Jahre auf der Erde vergangen sind. Wie schnell muss ihr Raumschiff im Laufe dieses Jahres geflogen sein?

33. Frau Apostrophes fliegt an Mr. Still mit Tempo $u = 0.99c$ in ihrem Raumschiff vorbei, dessen <u>*Ruhe*</u>länge (*also in <u>ihrem</u> Rahmen!*) $L' = 100\text{m}$ beträgt. Wie lang ist das Raumschiff *für Mr. Still*, der die Länge des vorbei fliegenden Raumschiffs *an einem einzigen Augenblick* ($\Delta t \approx 0$) misst?

Numerische Ergebnisse

- 29: $[25\text{ ns}]$
- 32: $[\sim 0.99995\ c]$

Konstruktionsübung: <u>*Prüfungsvorbereitung*</u>!

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Zeitdilatation (Fliegende Uhren gehen langsamer): Herr Still klatscht zweimal in die Hände mit einem zeitlichen Abstand von Δt, ohne sich von der Stelle zu bewegen. Beweise, dass Frau Apostrophes' Messung $\Delta t'$ dieses zeitlichen Abstands gleich $\Delta t' = \gamma(u)\Delta t$ ist.

Musterlösung:

Einordnen

Wir sollen beweisen, dass in Fr. Apostrophes' Rahmen der zeitliche Abstand $\Delta t'$ zwischen zwei Ereignissen, *die in Herr Stills Rahmen am selben Ort stattfinden*, $\Delta t' = \gamma(u)\Delta t$ beträgt.

Hineinversetzen

Die Lorentz Transformation zwischen den beiden ist: $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma(u)\begin{pmatrix} 1 & -u/c^2 \\ -u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$. Diese Gleichung können wir verwenden, um den zeitlichen Abstand in Fr. Apostrophes' Rahmen zu beweisen. Da sich Herr Still nicht bewegt, gilt $\Delta x = 0$.

Plan

1. Benütze die Lorentz Transformation um einen Zusammenhang zwischen $\Delta t'$ und Δt zu finden.
2. Setze dabei $\Delta x = 0$.

Anwenden

1. Die Lorentz Transformation lautet:
$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma(u)\begin{pmatrix} 1 & -u/c^2 \\ -u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow t' = \gamma(u)(t - x\,u/c^2)$$
Nun betrachten wir nicht mehr den genauen Zeitpunkt t', x', sondern eine Änderung $\Delta t', \Delta x'$:
$$\begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix} = \gamma(u)\begin{pmatrix} 1 & -u/c^2 \\ -u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta t' = \gamma(u)(\Delta t - \Delta x\,u/c^2)$$
2. Da wir gesagt haben, dass sich Herr Still nicht bewegt, gilt $\Delta x = 0$. Daraus folgt:
$$\Delta t' = \gamma(u)\,\Delta t$$

Ergebnis einordnen

Die Aufgabe sagt ja, dass fliegende Uhren langsamer gehen. Aus Fr. Apostrophes' Sicht entspricht Herr Stills Klatschen zwei Ticks einer fliegenden Uhr, und da der Lorentz-Faktor größer 1 ist, ist ihr Zeitinterval tatsächlich größer Δt.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Raumkontraktion: Beweise, dass sich der räumliche Abstand $\Delta x'$ zwischen zwei Ereignissen in Frau Apostrophes‘ Rahmen aus dieser Gleichung ergibt: $\Delta x' = \gamma(u)(\Delta x - u\Delta t)$, und bringe Argumente für die folgende Aussage: „*Fliegende Lineale sind kürzer*“.