Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 40: Wie verdrehte Euler die reelle Zahlenlinie?

ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

- Den Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Zahlen erklären;
- Eulers Formel als Drehung des reellen Zahlenstrahls in zwei Dimensionen einordnen;
- Trigonometrische Identitäten aus Eulers Formel herleiten;
- Lösungsprozeduren aus Eulers Formel generieren.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

Komplexe Zahlen erweitern 1-D Zahlenstrahl auf eine 2-D Zahlenebene

1. Was sind die zwei Lösungen dieser quadratischen Gleichung: $x^2 - 1 = 0$?
2. Was sind die Lösungen dieser quadratischen Gleichung: $x^2 + 1 = 0$?

Wenn wir in der Schule eine Frage wie diese fanden, neigten wir dazu, zu sagen: „Oh je, diese Gleichung hat keine Lösung – lass uns einfach aufgeben!“. Aber vielleicht hatten wir einfach noch nicht die richtigen Zahlen erfunden, um die Gleichung zu lösen. In einem früheren Kapitel haben wir zum Beispiel *Mexclops* gesehen – Zahlen mit der Form $\{x|y\}$, die wir so multiplizierten:

$$\{x|y\} \times \{u|v\} \equiv \{xu - yv|yu + xv\}$$

3. Überprüfe, dass die Mexclops $\{1|0\}$ und $\{-1|0\}$ beide Lösungen der folgenden quadratischen Gleichung sind: $x^2 - 1 = 0$.
4. Überprüfe, dass die Mexclops $\{0|1\}$ und $\{0|-1\}$ beide Lösungen der folgenden quadratischen Gleichung sind: $x^2 + 1 = 0$.

Vielleicht hast Du inzwischen erraten, dass der übliche Name für mexclop eine komplexe Zahl ist. Eine ***komplexe Zahl*** $z \in \mathbb{C}$ hat die allgemeine Form $z = x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$. i ist keine reelle Zahl ($i \notin \mathbb{R}$), sondern eine komplett neuartige Zahl, deren Quadrat gleich -1 ist.

Tipp: Frage nicht, wie groß die Quadratwurzel von -1 ist! Akzeptiere einfach, dass i eine neue Zahl ist, deren Quadrat gleich (   ) ist.

Rechnen mit komplexen Zahlen funktioniert genauso, wie gewohnt

5. Berechne z^2, angenommen, dass $z = 3i$: $z^2 = (3 \cdot i)^2 = 3^2 \cdot i^2 = 9 \cdot (\quad\quad) = -9$.

Komplexes Addieren und Multiplizieren funktioniert genauso, wie bei reellen Zahlen! Nur müssen wir darauf achten, dass überall dort, wo der Ausdruck i^2 steht, wir diesen durch (   ) ersetzen müssen. Zum Beispiel:

6. Berechne: $(3 + 4i) + (2 + 7i) = 3 + 2 + 4i + 7i = (\quad\quad) + i(\quad\quad)$
7. Berechne: $(3 + 4i) - (2 + 7i) = 3 - (\quad\quad) + 4i - (\quad\quad) = 1 - 3i$
8. Berechne: $(3 + 4i) \times (2 + 7i) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 7i + 2 \cdot 4i + 4 \cdot 7(i^2)$

$$= (\qquad) + 29i - (\qquad)$$
$$= -22 + 29i$$

Komplexe Zahlen haben einen reellen und einen imaginären Teil

Sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl (also $z \in \mathbb{C}$). Dann ist $Re(z) \equiv x$ der ***reelle Teil*** von z, und $Im(z) \equiv y$ der ***imaginäre Teil*** von z. (**Merke:** der imaginäre Teil y ist selber eine *reelle* Zahl!)

Zwei komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sind sich gleich (also $z_1 = z_2$) iff $Re(z_1) = Re(z_2)$ und $Im(z_1) = Im(z_2)$.

9. Falls $Im(z) = 0$, ist z *rein* (   ).
10. Falls $Re(z) = 0$, ist z *rein* (   ).

Die komplex Konjugierte hilft uns beim Teilen komplexer Zahlen

Es ist oft nützlich das Vorzeichen des imaginären Teils zu wechseln. Diese Operation heißt ***komplexes Konjugieren***. Sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl; dann ist die Zahl $\bar{z} \equiv x - iy$ die ***komplex Konjugierte*** von z.

- Beispiel: Falls $z = 4 + 3i$, dann gilt: $\bar{z} = 4 - 3i$.

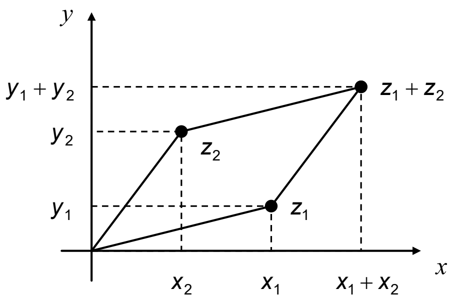
11. Falls $z = 4 - 3i$, dann gilt: $\bar{z} =$ (   ).
12. Falls $z = 5 - 23i$, dann gilt: $\bar{z} =$ (   ).
13. Falls $z = \cos\theta + i\sin\theta$, dann gilt: $\bar{z} =$ (   ).
14. Sei $z = x + iy$; dann gilt: $\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{x + iy}} = \overline{x - iy} = x + iy =$ (   ).

Der ***Betrag*** $|z|$ einer komplexen Zahl $z = x + iy$ erfüllt: $|z|^2 = x^2 + y^2$. Das heißt, wir können den Betrag mittels der komplex Konjugierten berechnen:

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (x + iy)(x - iy) \\ &= x^2 + ixy - ixy - i^2 y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

Wir können diese Idee benützen um komplexe Zahlen zu teilen, z.B:

15. $\frac{75-25i}{3+4i} = \frac{(75-25i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)} = \frac{125-375i}{(\qquad\qquad)} = 5 - 15i$



Komplexe Zahlen bilden eine Ebene

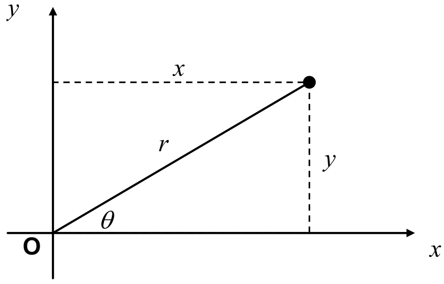
Komplexe Zahlen sind Pfeile in der ***komplexen Ebene***:

Addition ist ähnlich der Vektoraddition (siehe rechts).

16. Konjugieren ist eine Spiegelung an der (   ) Achse.
17. Wir können komplexe Zahlen auch als Betrag und Winkel darstellen: $r = |z|$ ist der (   ) von z, und $\theta = \text{phase}(z)$ ist die (   ) von z.

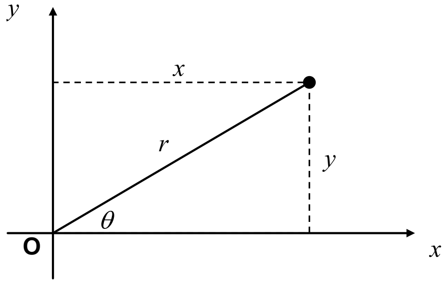
Eine komplexe Zahl besteht also aus einem Abstand r und einer Drehung θ.

Es ist also so: Eine komplexe Zahl ist ein Punkt in keiner räumlichen Ebene, sondern in einer Zahlenebene. Wir können diesen Punkt mit zwei Arten von Koordinaten beschreiben: entweder ***kartesische Koordinaten*** (x, y) oder ***Polarkoordinaten*** (r, θ). Beide sind genau gleich gut, aber für unterschiedliche Zwecke. (x, y) Koordinaten sind für Addition und Subtraktion geeignet, und (r, θ) Koordinaten sind für Multiplikation und Divsion geeignet.



Die komplexe e-Funktion rotiert Zahlen in der komplexen Ebene

Wir können zwischen kartesischen und Polarkoordinaten konvertieren, indem wir z auf die reelle und imaginäre Achsen projizieren (siehe rechts):



$$x = r\cos(\theta)\ ; \quad y = r\sin(\theta)$$

Also:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= r\cos(\theta) + ir\sin(\theta) \\ &= r \cdot (\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \end{aligned}$$

Die Polarkoordinaten (r, θ) von z setzen sich also aus einem Abstand ($r = |z|$) vom Ursprung (0) und einer Drehung θ zusammen. Wir schreiben:

$$z = x + iy = r\ (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

18. Wenn wir eine beliebige komplexe Zahl mit dem Ausdruck $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ multiplizieren, entspricht das also einer Drehung um den Winkel (   ).

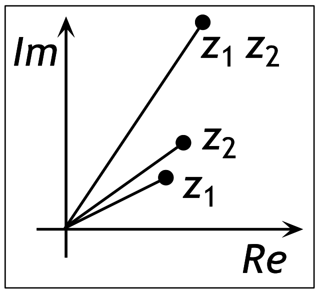
Leonhard Eulers (1707-1783) hatte die großartige Einsicht, dass

$$\exp(i\theta) \equiv e^{i\theta} \equiv \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

19. Das war damals für alle Mathematiker eine riesen Überraschung: Multiplizieren einer Zahl mit der Funktion (   ) dreht sie um den Winkel θ! Diese Identität ist extrem wichtig und heißt ***Eulers Formel***.

Zusammenfassend ist also jede komplexe Zahl das Produkt eines reellen Radiusabstands r mit einer komplexen Drehung, die diesen Abstand aus der reelen Achse um den Winkel θ gegen den Uhrzeigersinn in den komplexen Bereich der komplexen Ebene herausrotiert. Für jede komplexe Zahl z gilt also:

$$z = r \cdot e^{i\theta}$$

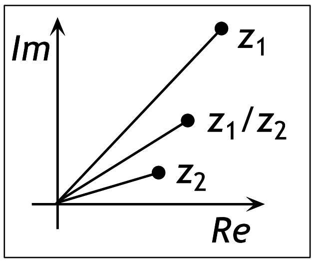


Deswegen geht bei komplexen Zahlen alles rund!

20. Berechne $z_1 = 2\ e^{0.4\,i}$ *mal* $z_2 = 3\ e^{0.5\,i}$:

$$z_1 \cdot z_2 = 2\ e^{0.4\,i} \cdot 3\ e^{0.5\,i} = (\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

*Um das **Produkt** zweier komplexen Zahlen zu berechnen, multiplizieren wir die Beträge und addieren die Phasen!*

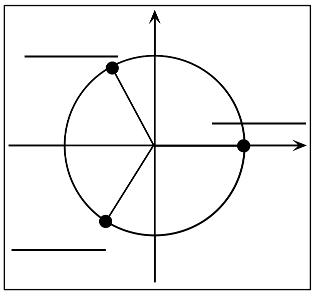


21. Berechne $z_1 = 6\,e^{0.8\,i}$ *geteilt durch* $z_2 = 2\,e^{0.3\,i}$:

$$z_1/z_2 = \left(6\,e^{0.8\,i}\right)/\left(2\,e^{0.3\,i}\right) = (\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

*Um den **Quotienten** zweier komplexen Zahlen zu berechnen, teilen wir die Beträge und subtrahieren die Phasen! (Siehe rechts)*

22. Sei $z = \sqrt[3]{1}$. Dann steht z für jede Zahl, für die $z^3 = 1$ gilt. Davon gibt's drei Stück – trage sie rechts im Diagramm ein.



23. Was ist der Kehrwert $1/z$ der komplexen Zahl $z = r\,e^{i\theta}$?

$$\frac{1}{z} = \left(r\,e^{i\theta}\right)^{-1} = (\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

*Der **Kehrwert** hat also den Betrag $1/r$ und die Phase $-\theta$.*

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

- Benütze die Additionsformeln für die Summe zweier Winkeln
- Aus den Additionsformeln entstehen die Doppelwinkel-Formeln
- Benütze die Doppelwinkel-Formeln um Gleichungen zu vereinfachen
- Benütze Pascals Dreieck um binomische Ausdrücke auszumultiplizieren

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt *gemeinsam*!

Komplexe Zahlen liefern uns allerlei Trig-Identitäten

Als Beispiel dafür, wie nützlich komplexe Zahlen sind, schauen wir kurz Eulers Formel an:

$$e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i\sin\theta \;\; ; \quad e^{-i\theta} \equiv \cos\theta - i\sin\theta$$

Deswegen gilt:

$$\begin{aligned} e^{i(A+B)} &\equiv \cos(A+B) + i\sin(A+B) \\ &\equiv e^{iA}\cdot e^{iB} \\ &\equiv (\cos A + i\sin A)(\cos B + i\sin B) \\ &\equiv \cos A\cos B - \sin A\sin B + i\,(\sin A\cos B + \cos A\sin B) \end{aligned}$$

Nun können zwei komplexe Zahlen sich nur dann gleich sein, wenn sowohl die reellen als auch die imaginären Teile sich gleich sind, also entdecken wir die ***Additionsformeln*** für Sinus und Kosinus:

$$\sin(A+B) \equiv \sin A\cos B + \cos A\sin B \;\; ; \quad \cos(A+B) \equiv \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

24. Leite auf ähnliche Weise die Subtraktionsformeln für $\sin(A-B)$ und $\cos(A-B)$ her.

Benütze die Additionsformeln für die Summe zweier Winkeln

Hier sind die gesammelten Additionsformeln:

$$\sin(A\pm B) \equiv \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$$
$$\cos(A\pm B) \equiv \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$$
$$\tan(A\pm B) \equiv \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A\tan B}$$

Benütze die Additionsformeln um exakte Trig-Werte zu berechnen

- Beweise, dass $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}\tan 15° &= \tan(60° - 45°)\\ &= \frac{\tan 60° - \tan 45°}{1 + \tan 60° \tan 45}\\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \left(\sqrt{3} \times 1\right)}\\ &= 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

Aus den Additionsformelen beweisen wir auch völlig neue Identitäten

- Beweise, dass $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \equiv \cos\alpha$:

$$\begin{aligned}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) &= \left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}\right) + \left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6} - \cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\\ &= \cos\alpha\end{aligned}$$

Setzen wir $A = B$, so bekommen wir die Doppelwinkel-Formeln

- Zum Beispiel:

$$\sin(2A) \equiv \sin(A + A) \equiv \sin A\cos A + \cos A\sin A \equiv 2\sin A\cos A$$
$$\cos(2A) \equiv \cos(A + A) \equiv \cos A\cos A - \sin A\sin A \equiv \cos^2 A - \sin^2 A$$

25. Vereinfache den Ausdruck $2\cot\frac{x}{2}\left(1 - \cos^2\frac{x}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}2\cot\frac{x}{2}\left(1 - \cos^2\frac{x}{2}\right) &\equiv 2\cot\frac{x}{2} \cdot \sin^2\frac{x}{2}\\ &\equiv 2\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \sin^2\frac{x}{2}\\ &\equiv 2\cos\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}\\ &\equiv \underline{\qquad\qquad}\end{aligned}$$

Eulers Formel gibt uns eine völlig neue Definition der Trig-Funktionen

Aus Eulers Formel folgt, dass

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \equiv \tfrac{1}{2}(\cos x + i\sin x + \cos x - i\sin x) \equiv \cos x$$

26. Beweise auf ähnliche Weise, dass $\sin x \equiv \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$.

Eulers Formel macht Trig-Potenzen leichter zu integrieren

Nehmen wir an, wir müssten folgendes Integral bilden:

$$\int \sin^5 x \; dx$$

Wir wissen bereits, dass $\sin x \equiv \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$. Außerdem wissen wir anhand von Pascals Dreieck, dass:

$$(a + b)^5 \equiv a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Wenn wir diese Ergebnisse zusammentun, entdecken wir, dass:

$$\begin{aligned}
\sin^5 x &\equiv \left[\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right]^5 \\
&\equiv \left(\frac{1}{2i}\right)^5 \left[\left(e^{ix}\right)^5 - 5\left(e^{ix}\right)^4\left(e^{-ix}\right) + 10\left(e^{ix}\right)^3\left(e^{-ix}\right)^2 - 10\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-ix}\right)^3 \right. \\
&\qquad \left. + 5\left(e^{ix}\right)\left(e^{-ix}\right)^4 - \left(e^{-ix}\right)^5\right] \\
&\equiv \frac{1}{32i}\left(e^{5ix} - 5e^{4ix}\cdot e^{-ix} + 10e^{3ix}\cdot e^{-2ix} - 10e^{2ix}\cdot e^{-3ix} + 5e^{ix}\cdot e^{-4ix} - e^{-5ix}\right) \\
&\equiv \frac{1}{32i}\left(e^{5ix} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix}\right) \\
&\equiv \frac{1}{32i}\left[\left(e^{5ix}-e^{-5ix}\right) - 5\left(e^{3ix}-e^{-3ix}\right) + 10\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right] \\
&\equiv \frac{1}{16}\sin 5x - \frac{5}{16}\sin 3x + \frac{5}{8}\sin x
\end{aligned}$$

Und Bingo! Plötzlich können wir unser Integral bilden:

$$\begin{aligned}
\int \sin^5 x \; dx &\equiv \int \left(\frac{1}{16}\sin 5x - \frac{5}{16}\sin 3x + \frac{5}{8}\sin x\right) dx \\
&\equiv -\frac{1}{80}\cos 5x + \frac{5}{48}\cos 3x - \frac{5}{8}\cos x + c
\end{aligned}$$

27. Bilde das Integral $\int \cos^5 x \; dx$.

Fuß fassen

28. Berechne diese komplexen Zahlen: (a) $(5+4i)+(3+2i)$; (b) $(5+4i)-(3+2i)$; (c) $(5+4i)(3+2i)$.
29. Berechne diese Ausdrücke: (a) $\mathrm{Re}((1+2i)^2)$; (b) $\mathrm{Im}((1+2i)^2)$.
30. Vereinfache diesen Bruch: $\frac{4+6i}{5+i}$.
31. Finde alle Lösungen dieser Gleichung: $z^2 - 2z + 2 = 0$.
32. Sei $z = x + iy$. Zeige, dass $z + \bar{z} = 2x = 2\,\mathrm{Re}(z)$ und $z - \bar{z} = 2iy = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.
33. Sei $z = x + iy$. Finde einen kartesischen Ausdruck für $z^{-1} \equiv \frac{1}{z}$.
34. Seien z_1, z_2 zwei komplexe Zahlen in kartesischer Form. Beweise alle drei der folgenden Ergebnisse:

$$\overline{(z_1+z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2\,; \quad \overline{(z_1\cdot z_2)} = \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\,; \quad \overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$$

35. In dieser Übung basteln wir **Eulers Gedicht** – eine Gleichung, die auf sehr eleganter Weise die fünf „Zauberzahlen“ der Mathematik verbindet: (a) Der Winkel 2π ist eine ganze Umdrehung um den Nullpunkt; was ist also die kartesische Form der Zahl $e^{2\pi i}$? (b) Wieviel einer ganzen Umdrehung beträgt der Winkel π? (c) Was ist also die kartesische Form der Zahl $e^{\pi i}$? (d) Bilde Deine vorige Anwort als Gleichung, und bringe sämtliche Konstanten auf die linke Seite dieser Gleichung. (e) Was sind die fünf „wichtigsten Zahlen“ der Mathematik in Eulers Gedicht?
36. **Wichtiger Tipp:** *Lerne die Additionsformeln auswendig!* Denn letztendlich kannst Du *alle* Trig-Formeln dieses Kapitels allein aus den Additionsformeln herleiten! Als Beispiel, benütze die Additionsformeln zusammen mit Pythagoras um alle drei verschiedenen Varianten der $\cos(\,)$ Doppelwinkelformel eigenständig herzuleiten.
37. Benütze die Doppelwinkelformel um diese Gleichung zu lösen: $\sin 2\theta = -\sqrt{3}\sin\theta\ (0 \le \theta \le 360°)$.
38. Benütze die $\cos(\,)$ Additionsformel um den *exakten* Wert von $\cos\frac{\pi}{12}$ zu berechnen.
39. Finde den exakten Wert von $\sin(A+B)$, wenn $\sin A = \frac{4}{5}$ und $\sin B = \frac{7}{25}$.
40. Beweise die Additionsformel für die Tangenzfunktion.
41. Zeige, dass $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \equiv 2\csc 2\theta$.

Muskeltraining

42. Was sind der Betrag und die Phase der Zahl e^{x+iy} ?
43. Beweise die Aussage, dass $\forall z \in \mathbb{C}: z \cdot \bar{z} = |z|^2$.
44. Die Polarform einer bestimmten komplexen Zahl ist $z = r\, e^{i\theta}$. Was ist die Polarform der komplex Konjugierten $\bar{z}$?
45. Seien $z_1 = \sqrt{3} + i$ und $z_2 = 3 + 3\sqrt{3}i$. Berechne $z_1 \cdot z_2$ in kartesischer Form und bringe anschließend alle drei Zahlen z_1, z_2 und $z_1 \cdot z_2$ in die Polarform $r\, e^{i\theta}$. Verifiziere, dass dabei $|z_1 z_2| = |z_2| \cdot |z_2|$ und $\text{phase}(z_1 z_2) = \text{phase}(z_1) + \text{phase}(z_2)$.
46. Sei $z = r \cdot e^{i\alpha}$. Beweise, dass diese Zahl durch eine Multiplikation mit dem Faktor $e^{i\theta}$ um einen Winkel θ um den Nullpunkt gedreht wird.
47. Beweise, dass $\frac{1}{(\cos\theta + i \sin\theta)} \equiv \cos\theta - i \sin\theta$. (Hinweis: Eulers Formel!)
48. Berechne den Ausdruck $\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$ als trigonometrische Formel. (Hinweis: Benütze das Ergebnis aus der vorigen Aufgabe.) Überrascht dich deine Antwort? Wir werden später großen Nutzen aus diesem Ergebnis ziehen können!
49. Beweise, dass $\cos x \equiv \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$. Finde daher eine Formel für $\cos^2(x)$ in Bezug auf einfache (also unpotenzierte) Sinus- und Kosinusfunktionen. Kannst Du dasselbe tun für Sinus?
50. Finde den exakten Wert von $\cos 75°$.
51. Finde anhand der Doppelwinkel- und Additionsformeln eine Identität für $\sin 3x$ in Bezug nur auf $\sin x$.
52. Benütze Eulers Formel um folgendes Integral zu bilden: $\int e^x \cos(3x)\ dx$.
53. Benütze Eulers Formel um eine Vielfachwinkelformel für $\cos^4(x)$ zu finden. Verwende Dein Ergebnis um folgendes Integral zu bilden: $\int \cos^4(x)\ dx$.

Numerische Ergebnisse

- 37: [$\theta \in \{0°, 150°, 180°, 210°, 360°\}$; Du musst *jeden* dieser Werte nachvollziehen können!]
- 38: [$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$]
- 39: [0.936]
- 51: [$3 \sin x - 4 \sin^3 x$]

Konstruktionsübung: *Prüfungsvorbereitung*!

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Beweise, dass $\cos(x) \equiv \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$.

Musterlösung:

Einordnen

Wir sollen beweisen, dass $\cos(x) \equiv \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$. Auf der linken Seite der Gleichung steht nur die trigonometrische Funktion $\cos(x)$ und auf der rechten Seite nur komplexe Exponentialfunktionen.

Hineinversetzen

Die Aufforderung zwischen trigonometrischen und Exponentialfunktionen zu konvertieren ist ein eindeutiger Hinweis auf Eulers Formel: $e^{ix} \equiv \cos(x) + i \sin(x)$. Diese gibt uns sofort die trigonometrische Übersetzung der Exponentialfunktion, also fangen wir am besten mit der rechten Seite an.

Plan

1. Benütze Eulers Formel um die rechte Seite in trig-Funktionen umzuwandeln.
2. Vereinfache das Ergebnis, mit dem Ziel die trig-Form $\cos(x)$ zu bekommen.

Anwenden

1. Wir benützen Eulers Formel und die rechte Seite umzuformen:

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) \equiv \tfrac{1}{2}(\cos(x)+i\sin(x)+\cos(-x)+i\sin(-x))$$

2.
$$\equiv \tfrac{1}{2}(\cos(x)+i\sin(x)+\cos(x)-i\sin(x))$$
$$\equiv \tfrac{1}{2}(2\cos(x))$$
$$\equiv \cos(x) \ \ \underline{\text{qed}}$$

Ergebnis einordnen

Als Test können wir ein paar Werte einsetzen, z.B. wenn $x=0$, ist sowohl $\cos(x)$ als auch $\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$ gleich 1. Oder wir können bemerken, dass beide Ausdrücke gerade Funktionen sind (erfüllen also die Bedingung $f(-x) \equiv f(x)$).

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Benütze Eulers Formel um zu beweisen, dass $\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)} \equiv \cos\theta - i\sin\theta$.

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Berechne das unbestimmte Integral $I \equiv \int \sin^4(x)\ dx$.

Musterlösung:

Einordnen

Der Integrand ist eine höhere Potenz von $\sin(x)$: schwierig!

Hineinversetzen

Potenzen der Trig-Funktionen sind schwierig zu integrieren, aber Eulers Formel gibt uns einen Ausdruck für $\sin(x)$ in Bezug auf die Exponentialfunktion: $\sin(x) \equiv \frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$. Diesen Ausdruck können wir mit Pascals Dreieck potenzieren.

Plan

1. Benütze Pascals Dreieck und berechne den Ausdruck $\sin^4(x) = \left(\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right)^4$.
2. Verwende das Ergebnis um das Integral $I \equiv \int \sin^4(x)\ dx$ zu berechnen.

Anwenden

1. Wir verwenden Pascals Dreieck um die Potenz zu berechnen (Sequenz für vierte Potenz: 1 4 6 4 1). Dann ersetzen wir $\cos(x) \equiv \frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$.

$$\begin{aligned}
\sin^4(x) &= \left(\tfrac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right)^4 \\
&= \tfrac{1}{16}\left[\left(e^{ix}\right)^4 - 4\left(e^{ix}\right)^3\left(e^{-ix}\right) + 6\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-ix}\right)^2 - 4\left(e^{ix}\right)\left(e^{-ix}\right)^3 + \left(e^{-ix}\right)^4\right] \\
&= \tfrac{1}{16}\left[e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6e^{0} - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right] \\
&= \tfrac{1}{16}\left[\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right) + 6 - 4\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)\right] \\
&= \tfrac{1}{16}[2\cos(4x) + 6 - 8\cos(2x)] \\
&= \tfrac{1}{8}\cos(4x) + \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{2}\cos(2x)
\end{aligned}$$

2. Jetzt ersetzen wir $\sin^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ in I und evaluieren das Integral:

$$I \equiv \int \sin^4(x)\ dx = \int \left[\frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right]\ dx$$
$$= \underline{\frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + c}$$

Ergebnis einordnen

Da die Potenz 4 eine gerade Zahl ist, muss die Funktion $\sin^4(x)$ überall positiv sein, und deswegen muss ihr Integral von 0 bis 2π gleich 2-mal dem Integral von 0 bis π sein. Und tatsächlich:

$\frac{1}{32}\sin(4 \cdot 2\pi) + \frac{3}{8} \cdot 2\pi - \frac{1}{4}\sin(2 \cdot 2\pi) = \frac{3\pi}{4}$, und $\frac{1}{32}\sin(4 \cdot \pi) + \frac{3}{8} \cdot \pi - \frac{1}{4}\sin(2 \cdot \pi) = \frac{3\pi}{8}$

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

Berechne das unbestimmte Integral $I \equiv \int \cos^5(x)\ dx$.