

# Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

## Module 01: Mathematical-physical methods

### Thema 41: Woraus besteht Stoff: Wellen oder Teilchen?

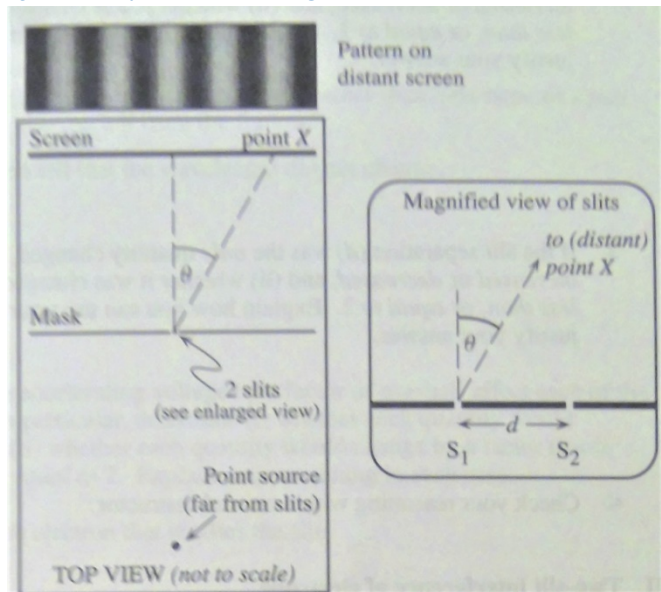
ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du ...

- Borns Interpretation der Elektroneninterferenz analysieren;
- Einsteins Darstellung des photoelektrischen Effekts analysieren;
- Feynmans Herleitung der komplexen Zahlen aus Photoneninterferenz beschreiben.

Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

*Wdhlg.: Der Winkel der Lichtinterferenzpeaks hängt von  $\lambda$  and  $d$  ab*

Wenn wir Licht der Wellenlänge  $\lambda$  auf zwei sehr schmale Schlitze  $S_1$  and  $S_2$  strahlen, die einen Abstand  $d$  voneinander haben, beobachten wir an einem entfernten Foto-Film ein Interferenzmuster, wie rechts gezeigt.



1. In dieser vergrößerten Ansicht der Schlitze zeigt ein Pfeil in die Richtung vom Schlitz  $S_1$  zu einem bestimmten Punkt  $X$  auf dem Foto-Film. Zeichne in der vergrößerten Ansicht einen Pfeil, um die ungefähre Richtung vom Schlitz  $S_2$  zum *entfernten* Punkt  $X$  anzuzeigen.
2. Suche und markiere das Liniensegment, das die Differenz zwischen den Weglängen der beiden Schlitze zum Punkt  $X$  am Foto-Film darstellt.
3. Wie groß ist der ungefähre Weglängenunterschied für *kleine* Winkel  $\theta$  (in Bogenmaß gemessen)? (Hinweis: Für *kleine* Winkel  $\theta$  im Bogenmaß gilt:  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ .)
4. Für welche Werte der Weglängendifferenz (ausgedrückt in Bezug auf  $\lambda$ ) gibt es maximale konstruktive Interferenz (d. h. einen *maximalen* Peak)?
5. Für welche Werte der Weglängendifferenz (ausgedrückt in Bezug auf  $\lambda$ ) gibt es maximal *destruktive* Interferenz (d. h. ein Intensitäts-*maximum*)?
6. Angenommen, ich halte den Abstand zwischen den Schlitzen und dem Foto-Film fest, aber ich ändere das Experiment auf eine Weise, die das Muster vom Original zum rechts gezeigten neuen Muster ändert. Sind die Winkel zu den Interferenzpeaks im neuen

Original pattern



New pattern



Muster *größer, kleiner* oder *gleich* den Winkeln im ursprünglichen Muster? Erkläre, wie Du es an den zwei verschiedenen Fotos erkennen kannst.

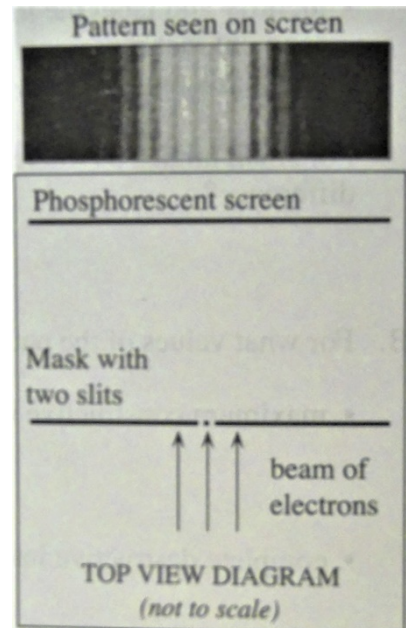
7. Wenn die *einzig*e Änderung, die ich an dem Experiment vornehme, die Wellenlänge  $\lambda$  des Lichts war, entscheide, ob ich  $\lambda$  *vergrößert* oder *verkleinert* habe.
8. Habe ich  $\lambda$  um einen Faktor *größer, kleiner* oder *gleich 2* verändert? Erkläre, wie Du Dein Ergebnis aus Aufgabe 3 verwenden kannst, um diese Antwort zu begründen.
9. Wenn die *einzig*e Änderung, die ich an dem Experiment vornehme, der Abstand  $d$  zwischen den Schlitzen war, entscheide, ob ich  $d$  *vergrößert* oder *verkleinert* habe.
10. Habe ich  $d$  um einen Faktor *größer, kleiner* oder *gleich 2* verändert? Erkläre, wie Du Dein Ergebnis aus Aufgabe 3 verwenden kannst, um diese Antwort zu begründen.

### Elektronen erzeugen auch Interferenzpeaks!

In einem neuen Experiment beschleunigen wir einen Elektronenstrahl durch eine Potentialdifferenz  $\Delta\phi$  und projizieren diese Elektronen gegen zwei schmale Schlitze (siehe Diagramm rechts).

11. Schreibe eine Gleichung auf, die die Arbeit  $\Delta W$  ausdrückt, die an einem Elektron der Ladung  $q$  durch eine Potentialdifferenz  $\Delta\phi$  verrichtet wird.

Wir montieren einen phosphoreszierenden Schirm weit hinter den Schlitzen, und jedes Mal, wenn ein Elektron auf eine kleine Fläche des Schirms trifft, hinterlässt es einen kleinen weißen Fleck. Das Muster, das wir auf dem Bildschirm beobachten, wird rechts oben angezeigt.



12. Was ist ein besseres Modell für das Verhalten der Elektronen in diesem Experiment: dass sie geradlinig durch die Schlitze fliegen oder sich wie Wellen ausbreiten? Begründe Deine Antwort.
13. Angenommen, wir wiederholten dieses Experiment, aber diesmal beschleunigten wir die Elektronen durch eine *niedrigere* Potentialdifferenz von  $\frac{1}{2}\Delta\phi$  anstelle des vorherigen Wertes von  $\Delta\phi$ . Würdest Du erwarten, dass die hellen Bereiche auf dem Bildschirm *näher zusammenrücken*, sich *weiter auseinander* bewegen oder *gleichbleiben*? Besprich Deine Gründe mit Partnern.

### Ein Elektron besitzt eine Wellenlänge *kehrproportional* zum Impuls! 🙌

14. Wenn wir das obige Experiment durchführen, beobachten wir, dass sich der Abstand zwischen den hellen Bereichen tatsächlich um den Faktor  $\approx 1.4$  *vergrößert*, wenn wir die Energie der Elektronen durch einen Faktor 2 *teilen*. Und ganz allgemein, wenn wir die Energie der Elektronen durch einen Faktor  $\kappa$  *teilen*, stellen wir fest, dass sich dadurch der Abstand zwischen den hellen Bereichen um den Faktor  $\sqrt{\kappa}$  *vergrößert*. Glaubst Du angesichts dieser Informationen, dass die *Halbierung* der Beschleunigungsspannung die Wellenlänge der Elektronenwelle ändert?
15. *Falls ja*, nimmt die Wellenlänge zu oder ab? Ändert sich die Wellenlänge um einen Faktor *größer, kleiner* oder *gleich 2*? Erkläre, woran du das erkennen kannst.
16. *Falls nicht*, erkläre, wie Du feststellen kannst, dass sich die Wellenlänge nicht ändert.
17. Wieder angenommen, wir reduzieren die Beschleunigungspotentialdifferenz um einen Faktor von der Hälfte – also von  $\Delta\phi$  auf  $\frac{1}{2}\Delta\phi$ . Wie würde sich dies auf die *kinetische Energie* jedes Elektrons auswirken, das die Schlitze erreicht? Würde die kinetische

Energie *zunehmen* oder *abnehmen*? Würde sie sich um einen Faktor ändern, der *größer*, *kleiner* oder *gleich 2* ist? Erkläre Deine Argumentation.

18. Wie würde sich diese Verringerung der Potentialdifferenz auf den *Impuls* jedes Elektrons auswirken, das die Schlitze erreicht? Würde der Impuls *zunehmen* oder *abnehmen*? Würde er sich um einen Faktor ändern, der *größer*, *kleiner* oder *gleich 2* ist? Erkläre Deine Argumentation.

19. Wie würde sich die Verringerung der Potentialdifferenz auf die *Wellenlänge* jedes Elektrons auswirken, das die Schlitze erreicht? Würde der Impuls *zunehmen* oder *abnehmen*? Würde er sich um einen Faktor ändern, der *größer*, *kleiner* oder *gleich 2* ist? Erkläre Deine Argumentation.

Im Jahr 1924 schlug Louis de Broglie vor, dass *alle* materiellen Körper (einschließlich Deiner!) eine Wellenlänge besitzen, die über die **De-Broglie-Gleichung**  $\lambda = h/p$  mit ihrem Impuls  $p$  zusammenhängt. Dabei ist  $h \approx 6.625 \times 10^{-34}$  Js die **Planck-Konstante**.

20. Stimmen diese Informationen mit all Deinen Antworten zu den vorherigen Übungen überein? Falls nicht, behebe alle Inkonsistenzen.

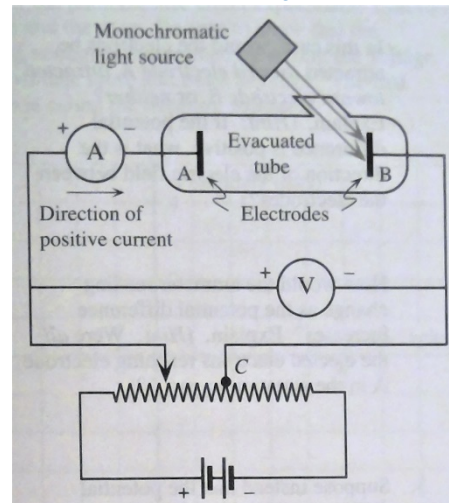
Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

- [Hier](#) ist eine Animation des de Broglie-Wellenspaltexperiments.

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt gemeinsam!

*Becquerel (1839): Licht schleudert Elektronen aus Metalloberflächen*

21. Im nächsten Experiment rechts schalten wir ein Amperemeter in Reihe mit einer Vakuumröhre, die zwei Metallelektroden A und B enthält. Dieses schalten wir wiederum in Parallel mit einem Voltmeter und einem variablen Widerstand mit einer Spannungsquelle. Wir bestrahlen die Elektrode B mit monochromatischem Licht. Welche Beziehung besteht zwischen der Voltmeteranzeige und der Potentialdifferenz  $\Delta\phi$  zwischen den Elektroden? Begründe.



22. Wenn wir die Schleifleitung von Elektrode A zum selben Punkt C anschließen, wo auch die Leitung von Elektrode B angeschlossen ist, wäre der Voltmeterwert dann *positiv*, *negativ* oder *null*? (*Hinweis*: Als Vergleich, stelle Dir vor, wir würden das Amperemeter und die Vakuumröhre völlig aus dem Schaltkreis entfernen. Vergleiche dann diese neue Situation mit der Frage dieser Aufgabe.)

23. Wo würdest Du die Schleifleitung von Elektrode A anschließen, um die Potentialdifferenz  $\Delta\phi = V_A - V_B$  zwischen den Elektroden immer *positiver* zu machen?

24. Wo würdest Du diese Schleifleitung anschließen, um  $\Delta\phi$  immer *negativer* zu machen?

Verschiedene Wissenschaftler von Becquerel (1839) bis Hertz (1887) entdeckten, dass in diesem Apparat Licht der Frequenz  $f$  Elektronen aus der Elektrode B ausstoßen kann, so dass sie durch das Vakuum zur Elektrode A emittiert werden, sofern die Bedingung  $hf > \Phi$  erfüllt ist. Dabei ist  $h$  die Planck-Konstante und  $\Phi$  die **Arbeitsfunktion** des Metalls in den Elektroden: die Arbeit, die erforderlich ist, um ein Elektron aus der Elektrode herauszustoßen. Dieses

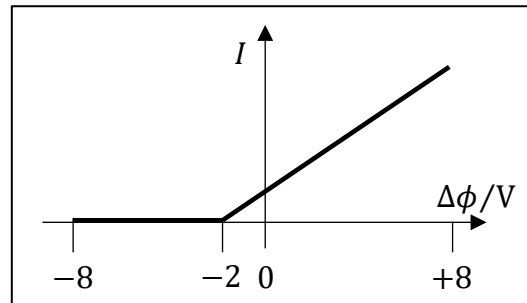
Phänomen wird der **photoelektrische Effekt** genannt, und die maximale kinetische Energie der aus  $B$  emittierten Elektronen ergibt sich durch die **photoelektrische Gleichung**:

$$E_{max} = hf - \Phi$$

25. Die Austrittsarbeit von Aluminium ist  $\Phi = 6.72 \times 10^{-19} \text{J}$ . Wenn wir Licht der Frequenz  $f = 1.5 \times 10^{15} \text{Hz}$  auf Aluminiumelektroden richten, würden Elektronen von der Elektrode  $B$  in die Vakuumröhre ausgestoßen werden? Wenn ja, was wäre die maximale kinetische Energie der emittierten Elektronen? Wenn nicht, erkläre warum nicht.

### Der photoelektrische Effekt zeigt, dass Licht Energie überträgt

26. Wenn wir die Schleifleitung von Elektrode  $A$  am Punkt  $C$  anschließen, zeigt die Amperemeteranzeige dann einen *positiven, negativen* oder *null* Strom an? Erkläre Deine Argumentation.
27. Wenn wir die Potentialdifferenz  $\Delta\phi$  zwischen den Elektroden allmählich von Null auf  $+8.0\text{V}$  erhöhen, würde das elektrische Feld zwischen den Elektroden *von  $A$  nach  $B$ , von  $B$  nach  $A$*  oder *weder-noch* zeigen?
28. Würden in diesem Fall ausgestoßene Elektronen von *Elektrode  $A$ , Elektrode  $B$*  oder *keiner* von beiden angezogen werden?
29. Wie würde sich der Amperemeterwert mit steigendem  $\Delta\phi$  ändern? Begründe.
30. Angenommen, wir schließen die Schleifleitung von Elektrode  $A$  rechts vom Punkt  $C$  an, um die Potentialdifferenz  $\Delta\phi$  allmählich von Null auf  $-8.0\text{V}$  zu *verringern*. Wie würde sich in diesem Fall der Strom durch das Amperemeter ändern?
31. Würde der Strom jemals Null erreichen? Wenn ja, bei welchem Wert von  $\Delta\phi$  würde der Strom null werden? Wenn nicht, erkläre warum nicht .
32. Würde der Strom jemals negativ werden? Erkläre warum oder warum nicht.
33. Der rechte Graph zeigt den Zusammenhang zwischen dem Amperemeterstrom  $I$  und der Potentialdifferenz  $\Delta\phi$ . Erkläre, wie Du anhand des oben beschriebenen Apparats den gezeigten Wert  $\Delta\phi = -2\text{V}$  in diesem Graph messen würdest.



Der Wert  $\Delta\phi = -2\text{V}$  in der vorherigen Aufgabe wird als **Stoppspannung** bezeichnet. Diese stellt die negative Potentialdifferenz dar, die wir an die Elektroden anlegen müssen, um zu verhindern, dass Elektronen den ganzen Weg von Elektrode  $B$  zu Elektrode  $A$  fliegen können.

### Licht liefert seine Energie proportional zur Frequenz als Teilchen ab! 🧐

An dieser Stelle müssen wir nun zwei Möglichkeiten in Betracht ziehen: Dass Licht seine Energie als *kontinuierlichen Wellenstrom* oder als *diskrete Teilchenlawine* abgibt. Diese beiden Möglichkeiten werden wir nun anhand unseres photoelektrischen Experiments prüfen ...

34. Angenommen, wir erhöhen die *Intensität* des Lichts, während die Wellenlänge gleich bleibt. Mache eine Kopie des obigen Graphs und überlege Dir, wie sich diese *Intensitätserhöhung* auf die photoelektrische Kurve auswirkt. Skizziere *leicht mit Bleistift*, wie die Kurve bei der höheren *Intensität* anders aussehen würde, *falls Licht seine Energie als kontinuierlichen Wellenstrom abgibt*. Erkläre die Argumentation, mit der Du diese Kurve skizziert hast.

35. Nun skizziere auf derselben Kopie des Graphs, wie die Kurve bei der höheren *Intensität* anders ausfallen würde, *falls Licht seine Energie als Teilchenlawine abgibt*. Erkläre die Argumentation, mit der Du diese Kurve skizziert hast.
36. Um Deine skizzierten Kurven zu überprüfen, überlege Dir, wie sich diese Intensitätszunahme auf (a) den Maximalwert des Stroms durch das Amperemeter und (b) den Wert  $\Delta\phi = -2V$  der Stoppspannung auswirken würde, bei der der Strom ungleich Null wird. Erkläre Deine Antworten.
37. Mit welcher Deiner zwei skizzierten Kurven stimmen Deine Antworten überein? Falls es Inkonsistenzen mit der einen oder der anderen Kurve gibt, behebe sie.
38. Stimmt Du der folgenden Aussage zu oder nicht zu? Erkläre Deine Argumentation: „*Im ursprünglichen Experiment gab es bei  $\Delta\phi = -2V$  keinen Strom. Wenn wir die Intensität der Lichtquelle erhöhen, erhöht sich die Gesamtenergie des Lichts. Dies bedeutet, dass die ausgestoßenen Elektronen mehr Energie haben, sodass eine Stoppspannung von  $-2V$  nicht mehr ausreicht, um den Strom zu ‚stoppen‘.*“
39. Nehmen wir nun stattdessen an, dass wir die *Frequenz* des Lichts erhöhen und dann die Intensität des Lichts so einstellen, dass der maximale Strom gleich dem Wert im obigen Graph ist. Mache Dir nochmal eine neue Kopie dieses Graphs und überlege Dir, wie sich diese *Frequenzerhöhung* auf die photoelektrische Kurve auswirkt: Skizziere *leicht mit Bleistift*, wie die Kurve bei der höheren *Frequenz* anders aussehen würde, *falls Licht seine Energie als kontinuierlichen Wellenstrom abgibt*. Erkläre die Argumentation, mit der Du diese Kurve skizziert hast.
40. Nun skizziere auf derselben Kopie des Graphs, wie die Kurve bei der höheren *Frequenz* anders ausfallen würde, *falls Licht seine Energie als Teilchenlawine abgibt*. Erkläre die Argumentation, mit der Du diese Kurve skizziert hast.
41. Um Deine skizzierten Kurven zu überprüfen, überlege Dir, wie diese Frequenzerhöhung (a) die Energie jedes Photons, das an der Elektrode *B* ankommt, und (b) den Wert  $\Delta\phi = -2V$  der Potentialdifferenz beeinflussen würde, bei der der Strom nicht-Null wird. Erkläre Deine Antworten.
42. Mit welcher Deiner zwei skizzierten Kurven stimmen Deine Antworten überein? Falls es Inkonsistenzen mit der einen oder der anderen Kurve gibt, behebe sie.
43. Nehmen wir schließlich an, wir ersetzen die Elektrode *B* durch eine Elektrode aus einem anderen Metall mit einer anderen Arbeitsfunktion  $\Phi' > hf$ . Mache eine weitere Kopie des obigen Graphs und skizziere *leicht mit Bleistift*, wie sich diese Änderung voraussichtlich auf die photoelektrische Kurve auswirkt. Erkläre die Argumentation, mit der Du diese Kurve skizziert hast.

### Fuß fassen

44. Fülle die Lücken im folgenden Text aus: „Negative Teilchen namens ..... wurden zuerst von J.J. Thomson entdeckt. Sie können aus einem Metall herausgestoßen werden, indem man ..... darauf strahlt – das nennt man den ..... Effekt. Wenn Licht mit ausreichend hoher Frequenz auf ein Metall fällt, werden Photoelektronen ..... Blaues Licht hat eine ..... Frequenz als rotes Licht. Die Energie kommt in Quanten oder „Paketen“ an, deren Größe von der ..... des Lichts abhängt. Ein Lichtteilchen wird als ..... bezeichnet. Um ein Photoelektron auszutreiben, muss das Photon mehr Energie haben als die ..... Funktion des Metalls. Licht überträgt sich als ....., aber gibt seine Energie als ..... ab. Normalerweise stellen wir uns Elektronen als Teilchen vor, aber auch sie übertragen sich wie .....“

45. Berechne die Energie in Joule, wenn ein Elektron durch eine Potentialdifferenz von (a) 10V und (b) 10kV beschleunigt wird. (Elektronenladung ist  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ )
46. Berechne die Energie eines einzelnen Photons von:
- Radiowellen mit Frequenz 100 MHz
  - Mikrowellen mit Wellenlänge 10 cm
  - Infrarot-Wellen mit Wellenlänge 1 mm
  - Ultraviolettes Licht mit Wellenlänge 100 nm
  - Röntgenstrahlen mit Wellenlänge 10 nm
47. Die rechte Tabelle gibt die kinetische Energie von Photoelektronen an, die von einer Metalloberfläche für verschiedene Lichtfrequenzen ausgestoßen werden. Plote ein Graph der Elektronenenergie gegen die Frequenz und verwende Dein Graph, um die Arbeitsfunktion des Metalls zu ermitteln. Was ist die Bedeutung der Steigung Deines Graphs?
- | <i>Electron energy</i><br>$10^{-19} \text{ J}$ | <i>Frequency</i><br>$10^{14} \text{ Hz}$ |
|--|--|
| 0.22   | 5.00                                     |
| 0.88   | 6.00                                     |
| 1.54   | 7.00                                     |
| 2.20   | 8.00                                     |
| 2.87   | 9.00                                     |
48. Wir strahlen Licht der Wellenlänge 400 nm auf eine Photozellenkathode (d. h. eine negative Elektrode) aus einem Metall mit der Arbeitsfunktion  $4.48 \times 10^{-19} \text{ J}$ . Werden Photoelektronen emittiert? Als nächstes richten wir ultraviolette Strahlung auf die Kathode, und Elektronen werden mit einer maximalen Energie von  $2.24 \times 10^{-19} \text{ J}$  ausgestoßen. Welche Wellenlänge hat die ultraviolette Strahlung?
49. Wir beschleunigen Elektronen auf eine kinetische Energie von  $8.0 \times 10^{-17} \text{ J}$ . Berechne ihre Geschwindigkeit, ihren Impuls und ihre de Broglie-Wellenlänge.

### Muskeltraining

50. Wenn wir ohne angelegte Spannung Licht auf eine Folien-Kathode richten, stellen wir fest, dass kürzere Wellenlängen dazu führen, dass Elektronen aus der Folie ausgestoßen werden, während dies bei längeren Wellenlängen nicht der Fall ist. Wie kommt das? Berechne die Arbeitsfunktion von sauberem Kalium, wenn seine Grenzwellenlänge  $\lambda_0 = 550 \text{ nm}$  ist.
51. (a) Was ist der photoelektrische Effekt? [1]; (b) Was verstehen wir unter der *Schwellenfrequenz* des auf eine Fotozelle fallenden Lichts und wie hängt sie mit der Arbeitsfunktion der Fotozelle zusammen? [3]; (c) Erkläre, wie der photoelektrische Effekt zwei experimentelle Beobachtungen liefert, die nicht durch ein Lichtwellenmodell erklärt werden können, sondern durch ein Photonenmodell. [6]; (d) In einem photoelektrischen Experiment fällt blaues Licht der Wellenlänge 450 nm auf eine Kaliumkathode in einer Photozelle. Bei einer Spannung von 0.76 V an der Fotozelle fällt der Strom auf Null. Finde die Arbeitsfunktion und die Schwellenfrequenz des Lichts für diese Kaliumoberfläche.

### Numerische Ergebnisse

???

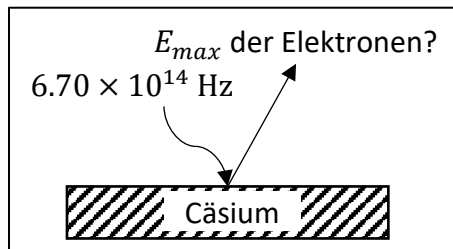
### Konstruktionsübung: Prüfungsvorbereitung!

#### Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Licht der Frequenz  $6.70 \times 10^{14} \text{ Hz}$  fällt auf sauberes Cäsiummetall mit Arbeitsfunktion  $3.43 \times 10^{-19} \text{ J}$ . Wie hoch ist die maximale kinetische Energie der emittierten Elektronen?

## Musterlösung:

### Einordnen



### Hineinversetzen

- Planck-Einstein-Gleichung:  $E_{max} = hf - \Phi$
- $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}$
- $f = 6.70 \times 10^{14} \text{ Hz}$
- $\Phi = 3.43 \times 10^{-19} \text{ J}$

### Plan

1. Vorgegebene Werte in die P-E-Gleichung einsetzen um  $E_{max}$  zu berechnen.

### Anwenden

$$\begin{aligned} E_{max} &= hf - \Phi \\ &= 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js} \times 6.70 \times 10^{14} \text{ Hz} - 3.43 \times 10^{-19} \text{ J} \\ &= 6.63 \times 6.70 \times 10^{-20} \text{ J} - 3.43 \times 10^{-19} \text{ J} \\ &= (4.44 - 3.43) \times 10^{-19} \text{ J} \\ &= \underline{\underline{1.01 \times 10^{-19} \text{ J}}} \end{aligned}$$

### Ergebnis einordnen

Die Einheiten kombinieren sich korrekt, und das numerische Ergebnis von etwa einem Elektronvolt ( $1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ ) erscheint angemessen.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

???