Evolving mathematics

Niall Palfreyman, Weihenstephan-Triesdorf University of Applied Sciences

Module 01: Mathematical-physical methods

Thema 42: Wie beschreibe ich eine Flugbahn in 3-D?

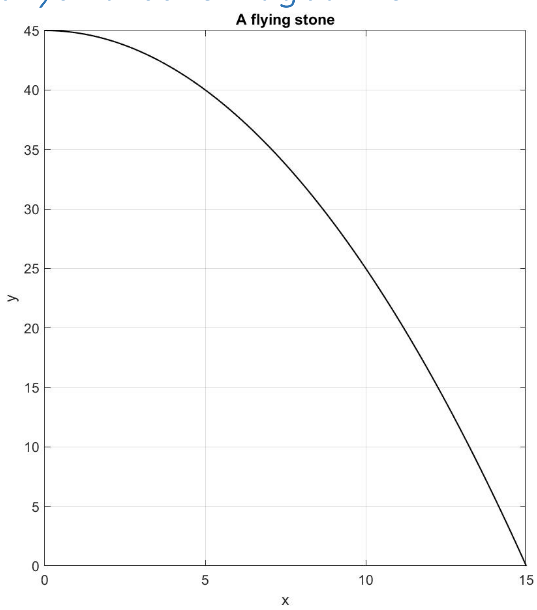
ILOs: Nach diesem Kapitel kannst Du …

- Vektorfunktionen anwenden, um eine Kurve in mehreren Dimensionen zu definieren;
- Schnittpunkte und Steigung von parametrischen Kurven berechnen;
- Trennbare Differentialgleichungen lösen.

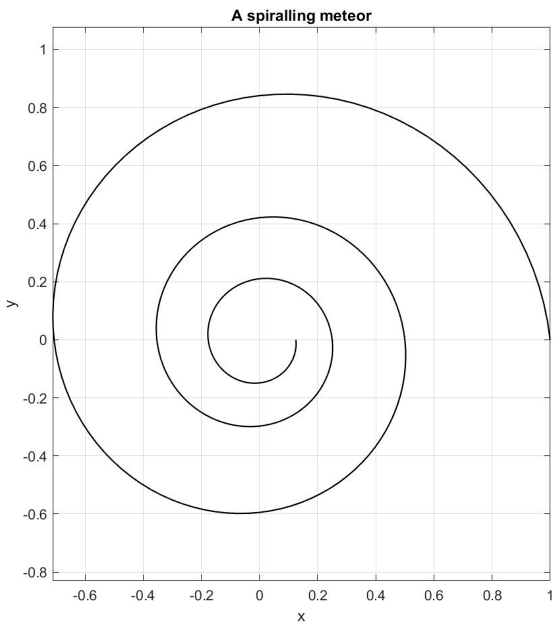
Dekonstruieren: Bearbeite diesen Abschnitt *vorm* Treffen!

Vektorfunktionen definieren Kurven als physikalische Flugbahnen

Bisher haben wir Kurven mithilfe von Funktionen beschrieben. Das Diagramm rechts zeigt zum Beispiel die parabolische Flugbahn eines Steins, der mit einer horizontalen Geschwindigkeit von $5\ \mathrm{m/s}$ von einer $45\ \mathrm{m}$ hohen Klippe geworfen wird.



1. Finde eine Gleichung der Form $y = f(x)$ die diese Flugbahn eines Steins beschreibt.



2. Betrachte nun das Diagramm auf der linken Seite, das einen Meteoriten zeigt, der in die Erde eindringt. Könntest Du *diese* Flugbahn mit einer Gleichung der Form $y = f(x)$ beschreiben?

Es kommt oft vor, dass explizite geometrische Gleichungen wie $= f(x)$ nicht existieren oder schwer zu finden oder an neue Kontexte anzupassen sind. Nehmen wir zum Beispiel an, wir werfen unseren Stein von einer Klippe auf einem Mond, wo die Oberflächengravitation ein Fünftel der Erdanziehungskraft beträgt. Es ist nicht offensichtlich, wie Deine Gleichung aus Aufgabe 1 in diesem neuen Kontext aussehen würde. Stattdessen ist es normalerweise bequemer, die *Zeit* (t) zu verwenden, um die Änderungen der verschiedenen physikalischen Koordinaten x, y and z. miteinander zu verknüpfen. Machen wir genau das jetzt …

3. Der Stein aus Aufgabe 1 fliegt in x-Richtung mit konstanter Geschwindigkeit von $5\ \mathrm{m/s}$. Drücke die x -Koordinate des Steins als Funktion $x(t)$ der Zeit aus.
4. Drücke die y-Koordinate des Steins als Funktion $y(t)$ der Zeit aus.
5. Komponiere die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ zu einer einzelnen ***Vektorfunktion*** von Zeit:

$$\boldsymbol{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

6. Stelle Dir nun vor, die Zeit läuft kontinuierlich von 0 bis 3 Sekunden ($0\mathrm{s} \leq t \leq 3\mathrm{s}$). Überprüfe, ob Deine Vektorfunktion $\boldsymbol{x}(t)$ als zeitabhängiger Ortsvektor die korrekte parabolische Bahn des fliegenden Steins verfolgt.
7. Wie würdest Du die Vektorfunktion $\boldsymbol{x}(t)$ anpassen, um den Fall eines Steins zu beschreiben, der auf einem Mond mit einem Fünftel der Erdoberflächengravitation fliegt?

Herzliche Glückwünsche! Du hast gerade Deine ersten parametrischen Gleichungen einer Kurve konstruiert.

Vector functions can describe arbitrary curves in space

8. Von diesem Erfolg ermutigt, versuchen wir nun, Vektorfunktionen zu verwenden, um den oben gezeigten spiralförmigen Meteorflugbahn zu beschreiben. Konzentriere Dich auf den Startpunkt $(1,0)$) auf der rechten Seite des Diagramms und stelle Dir vor, wie der Meteor von diesem Punkt aus dreimal gegen den Uhrzeigersinn um die Erde kreist und später am Punkt $(0.125,0)$ ankommt. Wenn der Meteor um die Kurve fällt, sinkt seine x-*Koordinate* von 1.0 nach unten auf etwa -0.7 herunter, steigt dann durch Null zurück auf 0.5, dann sinkt und steigt wieder auf 0.25, bevor er schließlich wieder sinkt und auf 0.125 ansteigt. Dies sieht fast aus wie eine trigonometrische Funktion geteilt durch eine exponentiell wachsende Zahl. Wenn wir uns vorstellen, dass die Zeit wieder kontinuierlich von 0 nach 3 fließt ($0 \leq t \leq 3$), finde eine Funktion von t, die bei 1 beginnt und diesen Wert dann in jeder sukzessiven Zeiteinheit nochmal durch 2 dividiert. (*Mit anderen Worten: Wir teilen also durch Potenzen von 2!*)
9. Um die x-Koordinate des Meteors zu berechnen, müssen wir Deine exponentiell abnehmende Funktion aus der vorherigen Übung mit einer trigonometrischen Funktion multiplizieren, die bei 1 beginnt und dann drei vollständige Perioden in drei Zeiteinheiten ($0 \leq t \leq 3$) folgt. Finde eine solche geeignete trigonometrische Funktion und multipliziere sie mit Deinem exponentiell abnehmenden Faktor, um die x-*Koordinate* als zeitabhängige Funktion $x(t)$ zu berechnen.
10. Wiederhole nun den obigen Vorgang, um eine zeitabhängige Funktion $y(t)$ zu finden, die die y-*Koordinate* des Meteors beschreibt.
11. Überprüfe, ob Deine parametrischen Funktionen aus den vorherigen zwei Aufgaben die Flugbahn des spiralförmigen Meteors über drei Zeiteinheiten richtig beschreiben.
12. Trage Deine Ergebnisse in das folgende Paar ***parametrischer Gleichungen*** ein, die die Flugbahn des spiralförmig fallenden Meteors beschreiben:

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos(\underline{\qquad\qquad})/(2^{\underline{\qquad}}) \\ y &= \sin(\underline{\qquad\qquad})/(2^{\underline{\qquad}}) \end{aligned}\right\};\ (0 \leq t \leq 3)$$

13. Eine andere Möglichkeit, die Flugbahn des spiralförmig fallenden Meteors zu beschreiben, ist als eine Menge C von Ortsvektoren, die vom Parameter t abhängen:

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\underline{\qquad\quad})/(2^{\underline{\quad}}) \\ \sin(\underline{\qquad\quad})/(2^{\underline{\quad}}) \end{pmatrix} : 0 \leq t \leq 3 \right\}$$

Ressourcen: Überfliege diese Clips und Infos *vorm* Treffen!

- Parametrisierung verteilt die Kurvengleichung über die Koordinaten x und y
- Aus parametrischen Gleichungen kannst Du die Cartes'sche Gleichung herleiten
- Falls Trig-Funktionen auftauchen, verwende Trig-Identitäten
- Parametrische Gleichungen ableiten ist einfach!
- Implizites Differenzieren liefert Steigung, falls Gleichung $\boldsymbol{y = f(x)}$ nicht existiert
- Differentialgleichungen enthalten eine Ableitung
- Löse Differentialgleichungen durch Trennen der Variablen und Integrieren

Konstruktion: Wir bearbeiten diesen Abschnitt *gemeinsam*!

Implizites Ableiten

Wir können die Kettenregel verwenden, um etwas Hinterlistiges zu tun. Angenommen, wir wollen dy/dx aus der folgenden Gleichung berechnen:

(1) $x^2 + y - y^2 = 1$

Unser erster Gedanke ist, y auf die linke Seite einer Gleichung wie "$y = \cdots$" zu bringen, aber Du siehst, dass dies nicht so einfach ist. Wir nennen (1) eine ***implizite Gleichung*** für y, weil sie uns keinen expliziten Ausdruck für y in Bezug auf x liefert. Es gibt jedoch einen anderen Weg, die Ableitung zu finden, nämlich ***implizites Ableiten***. Wir leiten einfach die *gesamte* Gleichung (1) ab:

$$\begin{aligned} x^2 + y - y^2 &= 1 \\ \frac{d}{dx}(x^2 + y - y^2) &= \frac{d}{dx}(1) \\ 2x + \frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} &= -2x \\ \frac{dy}{dx}(1 - 2y) &= -2x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-2x}{1 - 2y} = \frac{2x}{2y - 1} \end{aligned}$$

Wir haben nun einen Ausdruck für dy/dx, den wir berechnen können, sobald uns jemand genaue Werte für x und y gibt. Tricky, oder? Aber es kommt noch mehr.

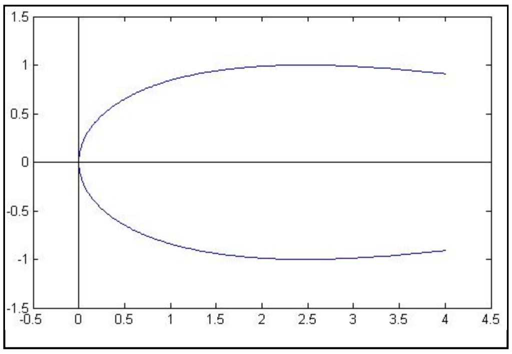
Umformen, dann ableiten

Manchmal ist es nützlich, eine Gleichung vor dem Ableiten zu manipulieren. Nehmen wir zum Beispiel an, wir möchten die Ableitung von $y = x^x$ finden. Wir können die alte Regel $x^n \longmapsto n\,x^{n-1}$ nicht verwenden, da dies nur funktioniert, solange n eine Konstante ist. Stattdessen nehmen wir zunächst den Logarithmus der gesamten Gleichung:

$$\begin{aligned} y &= x^x \\ \ln y &= x \ln x \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= x\frac{1}{x} + \ln x \\ \frac{dy}{dx} &= y\left(x\frac{1}{x} + \ln x\right) \\ &= x^x(1 + \ln x) \end{aligned}$$

Die Steigung einer parametrischen Kurve

Manchmal ist es nicht einfach oder bequem, eine Kurve als einfache Funktion von x auszudrücken. Betrachte zum Beispiel die Kurve im Diagramm rechts. Am einfachsten lässt sich diese Kurve in der folgenden ***parametrischen Form*** beschreiben:



(2) $\left.\begin{array}{r} x = t^2 \\ y = \sin t \end{array}\right\}$, wobei $t \in [-2{,}2]$.

Aber wie können wir die Steigung dieser Kurve an bestimmten Punkten ermitteln? Wie berechnen wir zum Beispiel die Ableitung dy/dx anhand dieser parametrischen Form? In solchen Fällen verwenden wir ***parametrisches Ableiten***:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt}$$

Im Falle der parametrischen Gleichungen (2):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\cos t}{2t}$$

Wenn zum Beispiel $= \frac{\pi}{2}$, ist die Steigung der Kurve: $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(\pi/2)}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0.$

Trennbare Differentialgleichungen

https://www.mathsisfun.com/calculus/separation-variables.html

Angenommen, wir haben die folgende ***Differentialgleichung***:

$$\frac{dy}{dx} = y \cos x$$

Wie lösen wir diese Gleichung? Ganz einfach: Wir *trennen* die Variablen in der Gleichung! Das heißt, wir multiplizieren alle y's rüber auf die eine Seite der Gleichung und alle x's auf die andere Seite, dann integrieren wir, so:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y \cos x \\ \frac{dy}{y} &= \cos x \;\, dx \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \cos x \;\, dx \\ \ln y + C &= \sin x + D \\ \ln y &= c + \sin x \\ y &= e^{c+\sin x} = e^c\, e^{\sin x} = A\, e^{\sin x} \end{aligned}$$

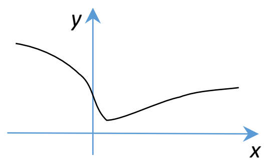
Fuß fassen

14. Eine Kurve wird durch die parametrischen Gleichungen $y = 2t^2 + t + 4$ und $x = (6-t)/2$ definiert. (a) Finde den Wert von x und y, wenn $t = 0{,}1{,}2{,}3$. (b) Was ist der Wert von t, wenn $x = -7$ oder wenn $y = 19$? (c) Finde die Cartes'sche Gleichung $y = f(x)$ der Kurve.

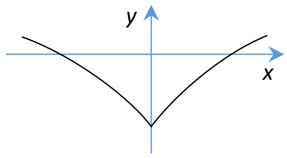
15. Die parametrischen Gleichungen einer Kurve sind $x = 2\sin\theta$ und $y = \cos^2\theta + 4$ $(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$. (a) Was sind die Koordinaten der Punkte, wo $\theta = \frac{\pi}{4}$ und wo $\theta = \frac{\pi}{6}$? (b) Was ist die Cartes'sche Gleichung der Kurve? (c) Welche Einschränkungen der *x*-Werte 7gibt es für diese Kurve?
16. Eine Kurve hat die parametrische Gleichungen $x = t^2$ und $y = 3t^3 - 4t$. (a) Finde dy/dx für diese Kurve. (b) Finde die Koordinaten der stationären Punkte der Kurve.
17. Benütze implizites Ableiten um dy/dx aus diesen Gleichungen zu finden: (a) $4x^2 - 2y^2 = 7x^2y$; (b) $3x^4 - 2xy^2 = y$; (c) $\cos x \sin y = xy$.
18. Benütze Deine Antworten aus der vorigen Aufgabe um die Steigung (a) der Tangenten zur Kurve $4x^2 - 2y^2 = 7x^2y$ beim Punkt $(1, -4)$, und (b) der Normalen zur Kurve $3x^4 - 2xy^2 = y$ bei $(1,1)$ zu ermitteln.
19. Benütze eine passende Trig-Identität um $\int \frac{2\tan 3x}{1-\tan^2 3x} dx$ zu finden.
20. Benütze $\sec^2 x \equiv 1 + \tan^2 x$ um $\int (2\tan^2 3x + 2) dx$ zu finden.
21. Benütze $\frac{3x+10}{(2x+3)(x-4)} \equiv \frac{A}{(2x+3)} + \frac{B}{(x-4)}$ um $\int \frac{3x+10}{(2x+3)(x-4)} dx$ zu finden.
22. Finde die allgemeine Lösung der DE $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{y}$ in der Form $y^2 = f(x)$.
23. Die Eichkätzchen-Population steigt verdächtig schnell an: die Anstiegsrate ist direkt proportional zur aktuellen Anzahl E der Eichkätzchen. (a) Bilde eine Differentialgleichung um die Anstiegsrate von E in Abhängigkeit von E, t (Zeit in Wochen) und einer positiven Konstanten k zu modellieren. (b) Um die bösen Igeln umzustürzen müssen die Eichkätzchen auf 150 wachsen. Wie lang dauert das (auf eine Woche genau) bei einer Anfangspopulation von 30 und $k = 0.2$?

Muskeltraining

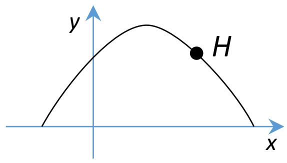
24. Die Kurve *C* wird durch die parametrischen Gleichungen $x = \frac{1}{3}\sin\theta$ und $y = 3 + 2\cos 2\theta$ definiert. Finde die Cartes'sche Gleichung von *C*.
25. Eine Kurve hat parametrische Gleichungen $y = 4 + \frac{3}{t}$, $x = t^2 - 1$. Was sind die Koordinaten der Punkte, wo diese Kurve die folgenden Geraden schneidet: (a) die *y*-Achse, (b) $x + 2y = 14$?
26. Die Kurve *C* wird durch folgende parametrischen Gleichungen definiert:
$$x = 1 - \tan\theta\,; \quad y = \frac{1}{2}\sin 2\theta \quad \left(\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$
(a) Finde die exakten Koordinaten des Punkts *P* auf *C*, bei dem $\theta = \frac{\pi}{3}$.
(b) Finde den Wert von θ beim Punkt *Q* auf *C* mit Koordinaten $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$.
(c) Beweise die Identität $\sin 2\theta \equiv \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$.
(d) Benütze diese Identität um zu zeigen, dass *C* die Cartes'sche Gleichung $y = \frac{1-x}{x^2-2x+2}$ hat.
27. Die Kurve *C* (rechts) hat die parametrischen Gleichungen:
$$x = t^3 + t\,; \quad y = t^2 - 2t + 2\,.$$
(a) *K* ist ein Punkt auf *C* mit Koordinaten $(a, 1)$; finde den Wert von *a*.
(b) Die Gerade $8y = x + 6$ schneidet *C* an den Punkten *K*, *L* und *M*. Finde die Koordinaten von *L* und *M*, angenommen, dass die *x*-Koordinate von *M* größer als die *x*-Koordinate von *L* ist.



28. Kurve C (rechts) hat parametrische Gleichungen $x = t^3 \quad y = t^2 - 4$. (a) Beim Punkt F hat t den Wert 0.5. Was sind die Koordinaten von F? (b) Die Gerade $3y = 2x - 11$ schneidet C zweimal; finde die Koordinaten dieser Schnittpunkte.



29. Die parametrischen Gleichungen der Kurve C (rechts) sind
$$x = 3 + 4\sin\theta \ ; \quad y = \frac{1+\cos 2\theta}{3} \quad \left(-\tfrac{\pi}{2} \le \theta \le \tfrac{\pi}{2}\right).$$
Der Punkt H auf C hat Koordinaten $\left(5, \frac{1}{2}\right)$. (a) Finde den Wert von θ beim Punkt H. (b) Zeige, dass die Cartes'sche Gleichung von C folgendermaßen geschrieben werden kann: $y = \frac{-x^2+6x+4}{24}$. (c) Finde die Domäne der x-Werte der Kurve C.



30. Gegeben sei die Kurve $C = \{(3\theta - \cos 3\theta\,, 2\sin\theta) : -\pi \le \theta \le \pi\}$. (a) Finde einen Ausdruck für dy/dx. (b) Zeige, dass die Steigung von C bei $\left(\pi + 1, \sqrt{3}\right)$ gleich $\frac{1}{3}$ ist. (c) Ermittle die Normale zu C bei $= \frac{\pi}{6}$.
31. Benütze eine passende Identität um $\int 2\cot^2 x\, dx$ zu finden.
32. Die Kurve C hat die Gleichung $6x^2y - 7 = 5x - 4y^2 - x^2$. (a) Die Gerade L hat die Gleichung $y = c$ und schneidet L bei $x = 2$; berechne $c > 0$. (b) L schneidet C auch beim Punkt P; was sind die Koordinaten von P? (c) Was ist die Steigung von C bei P?
33. (a) Finde die allgemeine Lösung der DE $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cos^2 y}{\sin x}$. (b) Finde die spezielle Lösung dieser Gleichung, wenn $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \pi$.
34. Die Kurve C hat die Gleichung $3e^x + 6y = 2x^2y$. (a) Benütze implizites Ableiten um einen Ausdruck für dy/dx zu finden. (b) Zeige, dass bei den stationären Punkten von C gilt: $y = 3e^x/(4x)$. (c) Finde die exakten Koordinaten dieser zwei stationären Punkte.
35. t Wochen nach dem Start einer Werbekampagne verkauft eine Jogurt-Firma eine Anzahl $b(t)$ Becher Jogurt pro Woche, die direkt proportional zur Quadratwurzel b steigt. (a) Bilde eine DE für b über Zeit. (b) Am Anfang verkauft die Firma 900 Becher pro Woche; ermittle $b(t)$ in Abhängigkeit einer unbekannten Konstanten k. (c) Wenn $k = 2$, wie viele Becher verkauft die Firma in der fünften Woche nach dem Start?

Numerische Ergebnisse

- 14: [(a) $\{(3,4), (2.5,7), (2,14), (1.5,2.5)\}$; (b) -3; (c) $y = 8x^2 - 50x + 82$]
- 15: [(a) $\left\{\left(\sqrt{2}, \frac{9}{2}\right), \left(1, \frac{19}{4}\right)\right\}$; (b) $y = 5 - \frac{x^2}{4}$; (c) $-2 \le x \le 2$]
- 16: [(a) $\frac{9t^2-4}{2t}$; (b) $\left\{\left(\frac{4}{9}, -\frac{16}{9}\right), \left(\frac{4}{9}, \frac{16}{9}\right)\right\}$]
- 17: [(a) $\frac{8x-14xy}{4y+7x^2}$; (b) $\frac{12x^3-2y^2}{1+4xy}$; (c) $\frac{\sin x \sin y + y}{\cos x \cos y - x}$]
- 18: [(a) $-\frac{64}{9}$; (b) $-\frac{1}{2}$]
- 19: [$-\frac{1}{6}\ln(\cos 6x) + c$]
- 20: [$\frac{2}{3}\tan 3x + c$]
- 21: [$-\frac{1}{2}\ln(2x+3) + 2\ln(x-4) + c$]
- 22: [$y^2 = 2\sin x + c$]
- 23: [8 Wochen]
- 24: [$y = 5 - 36x^2$]

- 25: [(a) $\{(0,1),(0,7)\}$; (b) $\{(0,7),(3,5.5),(8,3)\}$]
- 26: [(a) $\left(1-\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$; (b) $-\frac{\pi}{4}$]
- 27: [(a) 2; (b) $\{(10,2),(130,17)\}$]
- 28: [(a) $(0.125,-3.75)$; (b) $\{(1,-3),(-0.125,-3.75)\}$]
- 29: [(a) $\frac{\pi}{6}$; (c) $-1 \leq x \leq 7$]
- 30: [(a) $\frac{2\cos\theta}{3+3\sin 3\theta}$; (c) $y_N = -2\sqrt{3}x + 1 + \pi\sqrt{3}$]
- 31: [$-2\cot x - 2x + c$]
- 32: [(a) 0.5; (b) $(-0.75,0.5)$; (c) $\frac{88}{59}$]
- 33: [(a) $\tan y = \ln \sin x + c$; (b) $\tan y = \ln(2\sin x)$]
- 34: [(a) $\frac{3e^x-4xy}{2x^2-6}$; (b) $y = \frac{3e^x}{4x}$; (c) $\left(-1,-\frac{3}{4e}\right)$; $\left(3,\frac{e^3}{4}\right)$]
- 35: [(a) $\frac{db}{dt} = k\sqrt{b}$ $(k>0)$; (b) $b = \frac{1}{4}(kt+60)^2$; (c) 1225]

Konstruktionsübung: *Prüfungsvorbereitung*!

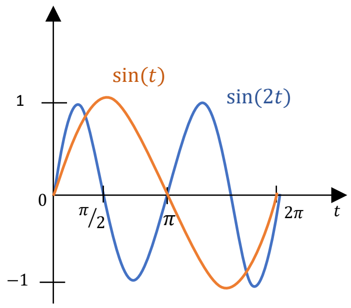
Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Die Vektorfunktion $C = \left\{\binom{x}{y} : x = \sin(t) \wedge y = \sin(2t) \wedge (0 \leq t < 2\pi)\right\}$ beschreibt den Ort eines Käfers über Zeit auf einem Blatt Papier, dessen x-Koordinate $\sin(t)$ und y-Koordinate $\sin(2t)$ ist. Zeichne den Weg C, dem dieser Käfer folgt.

Musterlösung:

Einordnen

Es ist eine Vektorfunktion C gegeben, die die x-Koordinate $\sin(t)$ und die y-Koordinate $\sin(2t)$ hat. Beide Koordinate beschreiben eine Sinuskurve, wobei die y-Kurve eine höhere Frequenz hat (vergleiche Diagramm). Wir sollen den Weg des Käfers beschreiben, bei dem gilt $0 \leq t < 2\pi$.

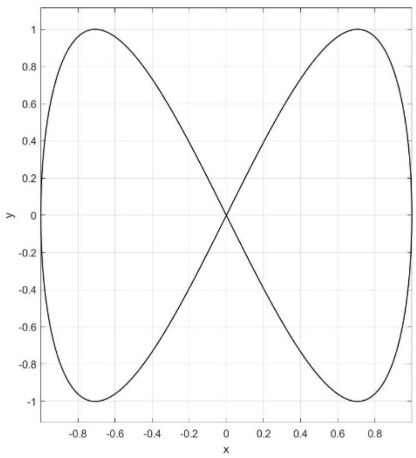


Hineinversetzen

Die Kurve C ist eine parametrisierte Kurve, weil ihre x,y-Koordinaten nicht einen Bestimmten Wert haben, sondern eine Funktion beschreiben, die abhängig ist von der Zeit t. Um den Weg des Käfers zu bestimmen, müssen wir die beiden Sinus Kurven betrachten und miteinander vergleichen. Dabei ist es wichtig den Definitionsbereich der Sinuskurven zu beachten.

Plan

1. Trage den Wert ein, den x bzw. y höchstens annehmen kann.
2. Vergleiche das Verhalten der beiden Kurven $\sin(t)$ und $\sin(2t)$ und zeichne den Weg des Käfers ein.



Anwenden

1. Der Wertebreich der Kurven liegt zwischen 1 und -1. Wir tragen diese Grenzen ein.
2. Bis $x = \sin(t)$ den Wert 1 erreicht, steigt $y = \sin(2t)$ schnell bis zum Wert 1 und fällt erst langsam und dann wieder schnell, bis sie den Wert 0 erreicht. Also geht der Käfer mit der gleichen Steigung, wie $\sin(2t)$ los und läuft dann (mit abnehmender Steigung) weiter, bis er den Punkt $(1,0)$ erreicht.

Jetzt geht der Käfer weiter (mit der gleichen Steigung) und läuft auf den Punkt $(0{,}0)$ zu. Nun sind wir im Interpret-Diagramm bei $t = \pi$ und rechts im Diagramm beim Punkt$(0{,}0)$. Diese Idee führen wir weiter, bis wir $t = 2\pi$ erreichen.

Ergebnis einordnen

Wenn wir einmal um die Kurve gehen, entsprechen zwei y-Schwingungen einer einzelnen x-Schwingung, was den Kreisfrequenzen 1 und 2 der zwei parametrischen Koordinaten entspricht.

Rekonstruiere Deine eigene Lösung zu dieser Aufgabe:

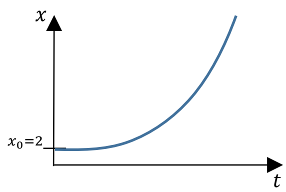
Die parametrische Kurve $K = \left\{\binom{x}{y} : x = \cos(3t) \wedge y = \sin(2t) \wedge (0 \leq t < 2\pi)\right\}$ beschreibt den Ort über Zeit eines Druckerkopfs auf einem Blatt Papier, dessen x-Koordinate $\cos(3t)$ und y-Koordinate $\sin(2t)$ ist. Zeichne die Kurve K, die dabei auf dem Druckpapier erscheint.

Dekonstruiere die Musterlösung dieser Aufgabe:

Es lebten einmal zwei (also $x = 2$) Hefezelle Xavier und Xaverl in einer riesen Petrischale, die beide Kinder wollten. Jede einzelne Zelle der langsam wachsenden Xavier-Familie bekam pro Kopf ein Baby alle zwei Stunde, also praktisch ein halbes Baby pro Stunde: $\frac{dx}{dt} = r \cdot x$, wobei $r = 0.5\ \mathrm{h}^{-1}$. Berate das Hefejugendamt zur Frage, nach genau welcher Gleichung die Größe $x(t)$ der Xavier-Familie in der nächsten Zeit steigen wird.

Musterlösung:

Einordnen



Wir wissen, dass die Gleichung $\frac{dx}{dt} = r \cdot x$ das Wachstum der Hefezellen beschreibt, wobei $r = 0.5\ \mathrm{h}^{-1}$. Am Anfang also bei $t = 0$ sind $x_0 = x(0) = 2$ Zellen vorhanden. Wir suchen nun einen Ausdruck für $x(t)$.

Hineinversetzen

Die Gleichung $\frac{dx}{dt} = r \cdot x$ ist trennbar, weil die rechte Seite einem Produkt von x- und t-Funktionen gleicht.

Plan

1. Trenne die Variablen: bringe alle Ausdrücke für x auf eine Seite und für t auf die andere Seite.
2. Integriere beide Seiten der Gleichung.
3. Bestimme die Integrationskonstante A.

Anwenden

1. Variablentrennung: $\frac{dx}{dt} = r \cdot x \Longrightarrow \frac{dx}{x} = r \cdot dt$
2. Jetzt können wir beide Seiten integrieren. Es entsteht dabei eine unbekannte Integrationskonstante.

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{x} = \int r \cdot dt \\ \Longrightarrow\ & \ln(x) = r \cdot t + c \\ \Longrightarrow\ & x = e^{rt} \cdot e^{c} \\ \Longrightarrow\ & x = Ae^{rt} \end{aligned}$$

3. Wir bestimmen die Integrationskonstante, indem wir $x(0) = 2$ und $t = 0$ einsetzen und nach A auflösen: $2 = Ae^{0.5h^{-1} \cdot 0h} \Longrightarrow A = 2$. Die Gleichung für das Wachstum der Hefezellen lautet also: $x(t) = 2e^{0.5h^{-1}t}$.

Ergebnis einordnen

Durch Einsetzen stellen wir fest, dass unsere Lösung die ursprüngliche Differentialgleichung $\frac{dx}{dt} = r \cdot x$ erfüllt.

Rekonstruiere Deine eigenen Lösung zu dieser Aufgabe:

Es lebten einmal zwei (also $x_0 = 2$) Hefezellen Xavier und Xenia in einer riesen Petrischale, die Kinder wollten. Jede einzelne Zelle der langsam wachsenden X-Familie bekam pro Kopf ein Baby alle zwei Stunden, also praktisch ein halbes Baby jede Stunde: $r = 0.5\ \mathrm{h}^{-1}$. Doch diesmal waren das sexuelle Hefezellen! Um ein gemeinsames Baby zu bekommen, mussten zwei Zellen zuerst zusammenkommen. Die X-Familie wuchs also in Abhängigkeit von der Wahrscheinlichkeit $x \cdot x$, dass zwei Zellen sich gleichzeitig am selben Ort befanden: $\frac{dx}{dt} = r \cdot x^2$. Berate das Hefejugendamt zur Frage, nach genaue welcher Gleichung die Größe $x(t)$ der X-Familie in der nächsten Zeit steigen wird, und bestimme, ungefähr wann die Petrischale zu klein wird.