Diversifizierung am Beispiel der PORTEFEUILLE-Optimierung

(Portefeuille-Theorie)

Portefeuille-Theorie

Portefeuille- Theorie:

- Risikostrukturentscheidung
- Analyse des Risikobeitrags einer Investition zum Gesamtrisiko aller Investitionen

Gesucht:

- Optimal diversifiziertes Portefeuille für risikoscheuen Investor
- Entscheidung auf Grundlage von μ und σ

Voraussetzungen:

- Investition in Wertpapiere, Anschaffungspreise bekannt
- Rückflüsse risikobehaftet, Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind bekannt

Praktische Relevanz?

- Beispiel 1: Konzeption eines Investmentfonds aus „erneuerbaren Energien“-Papieren
- Beispiel 2: Energiemix (Kombination Windpark + PV-Freiflächenanlage)
- Beispiel 3: Kleine RaiBa, Sparkasse, …: Klumpenrisiko

Klassische Problemstellung der Portfolio-Auswahl

Beispiel: Ein Investor besitze in der Entscheidungssituation zum Zeitpunkt t=0 liquide Mittel. Sein Planungszeitraum betrage T=1 Jahr.
Das Startvermögen soll restlos ausgegeben werden – und zwar für Beteiligungen, deren Anschaffungspreise z_{0j} sicher sind. Die zukünftigen Cashflows (Ausschüttungen) lassen sich dagegen nicht sicher prognostizieren. Es gibt nur Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Gesucht ist das optimale Portfolio für einen risikoscheuen Investor, der seine Entscheidung auf der Grundlage von Erwartungswert und Streuung (μ-σ^2-Prinzip) fällt.

	Preis in t=0 $-z_{0j}$ (in 1000 Euro)	Cashflows in t=1 (in 1000 Euro) z_{1js}			
		Umweltzustände			
		Z_1 q_1=0,3	Z_2 q_2=0,4	Z_3 q_3=0,1	Z_4 q_4=0,2
Windparkbeteiligung 1	200,0	206,0	230,0	238,0	224,0
PV-FF-Anlage Beteiligung	150,0	165,0	165,0	169,5	150,0

Rendite und Risiko eines Wertpapieres

Zustandsabhängige Rendite der j– ten Aktie :

$$r_{js} = \frac{z_{1\,js}}{z_{0\,j}} - 1$$

Erwartungswert der Renditen

zustandsabhängige Rendite der Windparkbeteiligung beim Umweltzustand Z_1

= 206/200 - 1

$$E[r_j] = \sum_{s=1}^{S} r_{js} q_s$$

Die zustandsabhängigen und erwarteten Renditen der drei Aktien betragen:

	Z_1 q_1=0,3	Z_2 q_2=0,4	Z_3 q_3=0,1	Z_4 q_4=0,2	$E[r_j]$
Windpark (j=1)	0,03	0,15	0,19	0,12	0,112
PV (j=2)	0,10	0,10	0,13	0,00	???

Erwartungswert der Rendite der Windparkbeteiligung

Rendite und Risiko eines Wertpapieres

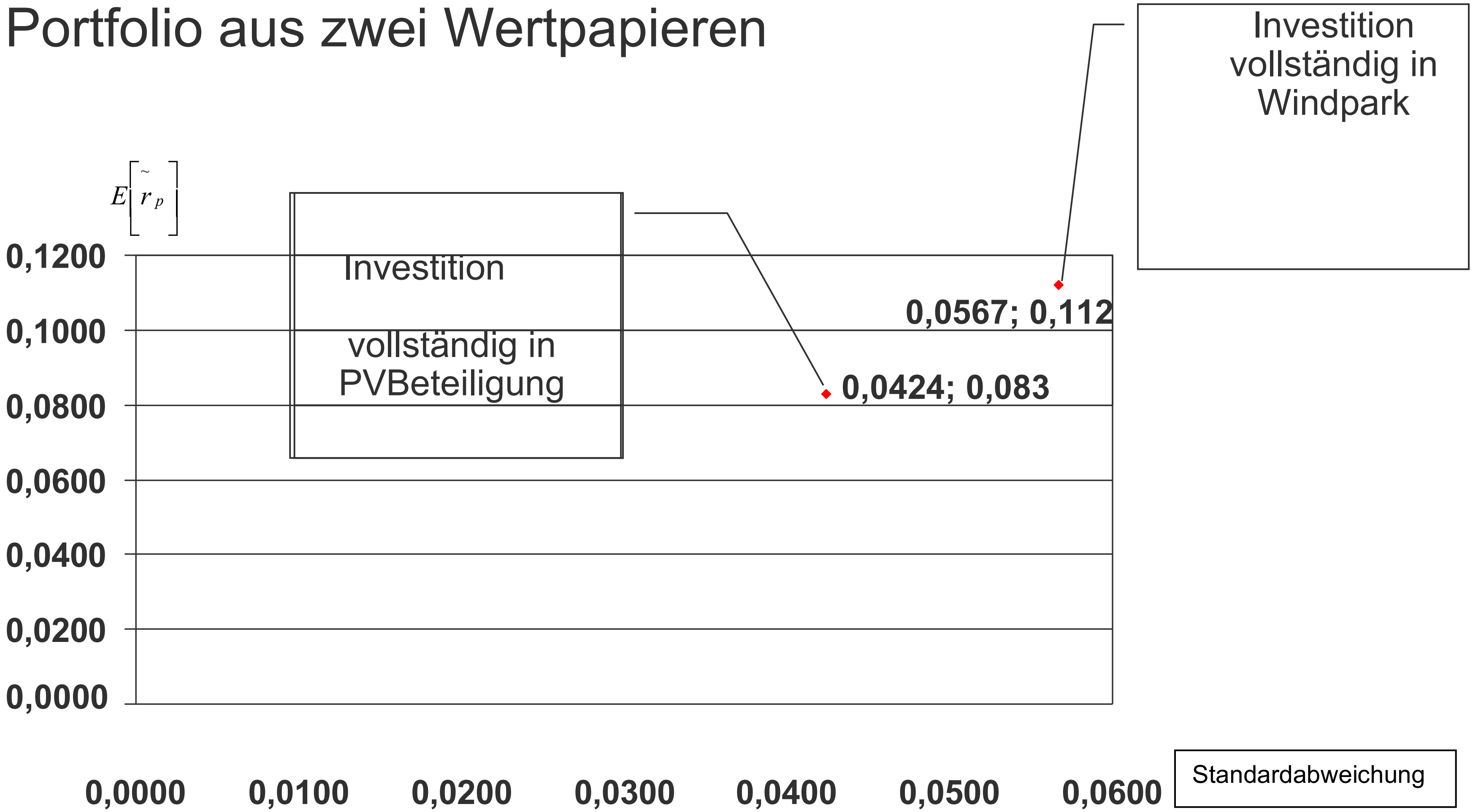
Das Risiko eines Wertpapieres wird in Form der Standardabweichung seiner Rendite erfasst:

	Z_1 q_1=0,3	Z_2 q_2=0,4	Z_3 q_3=0,1	Z_4 q_4=0, 2	$E[r_j]$
Windpark	0,03	0,15	0,19	0,12	0,112
PV	0,10	0,10	0,13	0,00	0,083

Varianz der Rendite des Windparks = $0{,}3*(0{,}03-0{,}112)^2+0{,}4*(0{,}15-0{,}112)^2+0{,}1*(0{,}19-0{,}112)^2+0{,}2*(0{,}12-0{,}112)^2=0{,}003216$

Varianz der Rendite der PV-Anlage = ???

Portfolio aus zwei Wertpapieren



Erwartete Rendite des Portfolios

Die erwartete Rendite des Portfolios entspricht dem gewogenen arithmetischen Mittel aus den Renditen der im Portfolio enthaltenen Wertpapiere.

Varianz - zwei Wertpapierfall:

Varianz Wertpapier 1: $Var\left[\tilde{r}_1\right] = \sum_{s=1}^{S}\left(r_{1s} - E\left[\tilde{r}_1\right]\right)^2 q_s$

Varianz Wertpapier 2: $Var\left[\tilde{r}_2\right] = \sum_{s=1}^{S}\left(r_{2s} - E\left[\tilde{r}_2\right]\right)^2 q_s$

Kovarianz zwischen den beiden Wertpapieren: $Cov\left[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2\right] = \sum_{s=1}^{S}\left(r_{1s} - E\left[\tilde{r}_1\right]\right)\left(r_{2s} - E\left[\tilde{r}_2\right]\right) q_s$

Nach Umformung und Einführung von Kovarianzen ergibt sich für die Varianz des Portfolios:

$$Var\left[\tilde{r}_P\right] = \omega_1^2 Var\left[\tilde{r}_1\right] + 2\omega_1\omega_2 Cov\left[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2\right] + \omega_2^2 Var\left[\tilde{r}_2\right]$$

Risiko der Portfoliorendite im Zwei – Wertpapier – Fall:

$$\sigma\left[\tilde{r}_P\right] = \sqrt{\omega_1^2 Var\left[\tilde{r}_1\right] + 2\omega_1\omega_2 Cov\left[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2\right] + \omega_2^2 Var\left[\tilde{r}_2\right]}$$

Fazit

- Durch Mischung riskanter Investitionen, die nicht in vollkommener Weise positiv miteinander korrelieren, kann Risiko in nennenswerter Weise „vernichtet“ („weg-diversifiziert“) werden.

- Risikominimales Portfolio: Wenn der Korrelationskoeffizient kleiner als +1 ist, gibt es ein Portfolio, welches das niedrigste Risiko von allen möglichen Portfolios besitzt.

Risikominimales Portfolio ermitteln

- Im Fall von zwei Aktienarten:
  Varianz der Portfoliorendite ist Funktion des Anteils von ω_1 (mit $\omega_2 = 1 - \omega_1$).
  Ableitung der Varianz der Portfoliorendite nach ω_1

$$Var\left[\tilde{r}_P\right] = \omega_1^2 Var\left[\tilde{r}_1\right] + 2\omega_1\omega_2 Cov\left[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2\right] + \omega_2^2 Var\left[\tilde{r}_2\right]$$

$$= \omega_1^2 Var\left[\tilde{r}_1\right] + 2\omega_1(1-\omega_1) Cov\left[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2\right] + (1-\omega_1)^2 Var\left[\tilde{r}_2\right]$$

$$= \omega_1^2 Var\left[\tilde{r}_1\right] + 2\omega_1 Cov\left[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2\right] - 2\omega_1^2 Cov\left[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2\right] + Var\left[\tilde{r}_2\right] - 2\omega_1 Var\left[\tilde{r}_2\right] + \omega_1^2 Var\left[\tilde{r}_2\right]$$

Erste Ableitung der Varianz der Portfoliorendite nach ω_1 :

$$\frac{dVar\left[\tilde{r}_P\right]}{d\omega_1} = 2\omega_1 Var\left[\tilde{r}_1\right] + 2Cov\left[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2\right] - 4\omega_1 Cov\left[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2\right] - 2Var\left[\tilde{r}_2\right] + 2\omega_1 Var\left[\tilde{r}_2\right]$$

Diese erste Ableitung null setzen und Gleichung nach ω_1 auflösen :

$$\omega_1 = \frac{Var\left[\tilde{r}_2\right] - Cov\left[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2\right]}{Var\left[\tilde{r}_1\right] + Var\left[\tilde{r}_2\right] - 2Cov\left[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2\right]}$$

Portefeuille-Theorie – Ergebnisse und Kritik

Ergebnisse:

- Rendite des Portefeuilles entspricht dem arithmetischen Mittel der Renditen aller Papiere
- Maximales Risiko entspricht dem arithmetischen Mittel der Risiken aller Papiere
- Durch Diversifikation lassen sich Risiken vernichten (Ausnahme: $Korr_{ij} = 1$)

Kritik:

- Akzeptanz des μ-σ-Prinzip
- Hauptproblem: Datengewinnung und Datenmasse
- Für n Wertpapiere werden benötigt:
  n Renditen
  n Varianzen
  $n(n-1)/2$ Kovarianzen